1. Verificar se a matriz A é estável.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Seja $p(z) = z^2 + az + b$ um polinômio com coeficientes complexos. Ache uma condição necessária e suficiente sobre os números complexos a e b para que $p(z)$ tenha todas as raizes com a parte real negativa.

3. Considere o sistema de contrôle:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{2}$$

Este sistema é estabilizável? Encontre uma lei de retroalimentação linear (quer dizer, uma matriz $K \in M_{1x3}$) para que todas as soluções vão o mais rápido possível para zero.

4. Seja um par (A, B) de matrizes de uma sistema linear controlável. Mostre que existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz $L \in M_{mxn}$ tal que o novo sistema $(A + BL, v)$ seja controlável.

5. considere agora:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{3}$$

A- Mostre que o sistema não é controlável, e portanto não é completamente estabilizável.

B- Para toda matriz $K \in M_{1x2}$ calcule o polinômio característico de $A + BK$ e seu espectro.

C- Exiba um $\omega > 0$ tal que para algum $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e para toda matriz K como acima não esteja satisfeita a relação

$$|| \exp t(A + BK)x_0|| \leq M \exp(-\omega t)||x_0|| \tag{4}$$

6. Dado o sistema linear:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \tag{5}$$

A- Verifique que o sistema é controlável.

B- Encontre uma matriz $L \in M_{2x3}$ e um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ tal que o par $(A + BL, Bv)$ seja controlável, onde A e B são as matrizes dos coeficientes do sistema dado na equação (5).

7. Considere a equação diferencial em $\mathbb{R}^2$:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 + 2\cos^2(t) & 1 - \sin(2t) \\ -1 - \sin(2t) & -2 + 2\sin^2(t) \end{pmatrix} x \tag{6}$$

Mostre que para todo t a matriz $A(t)$ tem autovalores -1. Mostre que $x(t) = (-e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ é uma solução ilimitada do sistema e, portanto, o ponto de equilíbrio 0 não é estável.