Entregar a lista resolvida em 7 dias

1. Achar os resíduos nos pólos das seguintes funções:

$$\text{a) } f(z) = \frac{2z}{z^3 + z^2 - 2} \text{ b) } f(z) = \frac{\sin(z)}{(z-4)^3 z^2}$$

2. Calcular $\int_\Gamma f(z)dz$ quando:

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1} \text{ e } \Gamma(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad t \in [-2,2] \\ 2e^{2\pi i(\frac{t-2}{2})} & \text{se} \quad t \in [2,3] \end{cases}$$

e quando

$$f(z) = \frac{z+1}{\sin(2z)} \text{ e } \Gamma(t) = 5e^{2\pi it}, t \in [0,1]$$

3. Explique como podemos calcular a integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ usando integração complexa.

4. O *Teorema de Rouché* diz o seguinte: Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ são duas funções analíticas no domínio Ω e Γ é uma curva simples fechada contida em Ω tal que f e ϕ sejam analíticas no interior de Γ e sobre a curva temos a desigualdade $|f(z)| > |phi(z)|$. Então $f(z)$ e $f(z) + phi(z)$ têm a mesma quantidade de zeros no interior de Γ.
Dê uma prova do teorema de Rouché usando o princípio do argumento. E aplique este resultado para determinar quantos zeros de $p(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ tem módulo estritamente menor que 1.