1. Sejam A e B as matrizes de um sistema linear $\dot{x} = Ax + Bu$, e seja $T > 0$. Mostre que se um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ está no espaço ortogonal de $\mathcal{A}(0,T)$ então está também no núcleo da matriz de controlabilidade Q_T.

2. Mostre que o sistema linear de controle abaixo é controlável usando o critério de Kalman.

$$y''' + ay'' + by' + cy = u \tag{1}$$

3. Dado o sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ache uma base do espaço vetorial $\mathcal{A}(0,T)$

4. Dado um sistema linear $\dot{x} = Ax + Bu$, e o operador linear:

$$\mathbf{l} : \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \tag{4}$$

$$\mathbf{l}(u_0, \ldots, u_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B u_k \tag{5}$$

Mostre que o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ que contém a imagem de B e é invariante por A coincide com a imagem do operador $\mathbf{l}$.

5. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

verifique se este par (A, B) é controlável