Quarta lista de MAP2321 | Ex4-2009

1. Achar as soluções complexas das equações

$$(z-2)^3 = 1 \tag{1}$$
$$\exp(2z) = 2 + 3\mathbf{i} \tag{2}$$

2. Achar a parametrização de um caminho no intervalo $[0,1]$, que liga por segmentos de retas os pontos 0, $2+\mathbf{i}$, 3 e novamente 0.
3. Dada as funções complexas

$$f(z) = \frac{(z^2-1)}{2z+2} \tag{3}$$
$$g(z) = z\exp(z+1) \tag{4}$$

Ache as partes reais e imaginárias destas funções e verifique se são analíticas em algum domínio de $\mathbb{C}$.
4. Se usarmos a forma polar de um número complexo $z = \rho(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$ e $f(z)$ é uma função analítica, mostre que as equações de Cauchy-Rieman em coordenadas polares se escrevem como

$$u_\rho = \frac{1}{\rho}v_\theta \tag{5}$$
$$v_\rho = -\frac{1}{\rho}u_\theta \tag{6}$$

5. A função $u(x,y) = x + 2y$ pode ser a parte real de uma função analítica em $\mathbb{C}$. Em caso positivo encontre as possíveis partes imaginárias.
6. Mostre que a curva

$$\gamma(t) = A.\mathrm{e}^{(1+2\mathbf{i})t} + B.\mathrm{e}^{(1-2\mathbf{i})t} \tag{7}$$

satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0 \tag{8}$$

Ache os valores de A e B para que esteja satisfeitas as condições iniciais

$$\gamma(0) = 0 \text{ e } \dot{\gamma}(0) = 1 \tag{9}$$

7. Considere a função complexa $f(z)$ abaixo e a curva $\alpha(t)$ sendo um segmento de reta de 0 até $1+\mathbf{i}$

$$f(z) = z + \bar{z} \tag{10}$$

Ache a integral $\int_\alpha f(z)dz$

8. Calcule a integral de $f(z) = z + 1/z$ ao longo do círculo unitário de raio 1 parametrizado no sentido anti-horário.
9. Calcular a integral ao longo do círculo $|z - 2| = 2$ parametrizado no sentido anti-horário da função

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)} \tag{11}$$

10. Se $\gamma(t)$ é uma parametrização do círculo unitário no sentido anti-horário calcular

$$\int_\gamma \frac{z + 1}{z^2 + 2z} \tag{12}$$