Cada questão vale 2.0 pontos. Sua nota será a soma das cinco melhores notas nas questões.

1. Se o sistema de controle linear for discreto da forma

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \tag{1}$$
$$x_0 = \mathbf{a} \tag{2}$$

Qual seria a fórmula para aplicação de transição de estados

$$\phi(N, 0, \mathbf{a}, u_n)$$

Repita análise de controlabilidade para este caso discreto.

2. Calcule a matriz de controlabilidade do sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{3}$$

3. Mostre que se Q é uma matriz real definida positiva entã ela é inversível.

4. Sejam $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ e $B \in \mathbb{R}^{nxm}$ mostre que se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor no núcleo das matrizes $B' \exp(sA')$ para todo $s > 0$ então $\mathbf{v}$ é ortogonal ao subespaço $\mathcal{A}(0, T)$

5. No sistema de controle

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{4}$$

Encontrar um controle admissível $u(s)$ que transfere o ponto $(3, 1)$ para o ponto $(0, 0)$ em tempo T dado a priori.

6. Mostre que se a matriz B de um sistema linear é nxn invertível então a matriz de controlabilidade também é invertível.

7. Dê um exemplo de um sistema linear com o espaço de estado de dimensão 3 e para o qual o conjunto $\mathcal{A}(0, T)$ tenha exatamente dimensão 2.

8. Considere as matrizes seguintes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

e o operador:

$$\mathbb{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{6}$$
$$\mathbb{L}(u_0, u_1) = Bu_0 + ABu_1 \tag{7}$$

Mostre que este operador é linear e calcule a matriz de representação na base canônica.

9. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Expressar A^5 como combinação linear de I, A e A^2.
10. Suponhamos que valha a seguinte relações entre matrizes:

$$A_1 = PAP^{-1} \tag{9}$$
$$B_1 = PB \tag{10}$$

Qual é a relação entre as matrizes de controlabilidade para o par (A, B) e para o par (A_1, B_1). Conclua que se uma é invertível a outra também é.