Primeira lista de MAP2321 | Ex1-2009

1. Reescreva o seguinte sistema de controle:

$$Y_n = Y_{n-1} + 2(Y_{n-1}^2 - Y_{n-2}.Y_{n-1}) + G_n \tag{1}$$

Como um sistema de controle de primeira ordem:

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) \tag{2}$$

e ache a linearização em torno de um ponto de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{u}$.
2. Considere o sistema:

$$\ddot{x} = -\sin(x) + u \tag{3}$$

Reescreva como um sistema de controle de primeira ordem e ache a linearização nos pontos de equilíbrios.
3. Considere a função

$$g(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} r\dot{\theta}^2 - 1/r^2 \\ -2(\dot{\theta}\dot{r}/r \end{bmatrix} \tag{4}$$

Verifique que $(r(t), \theta(t)) = (1, t)$ é solução da equação diferencial

$$\begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = g(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) \tag{5}$$

Reescreva este sistema linearizando em torno desta trajetória, fazendo as devidas mudanças de variáveis para que o sistema tenha 0 como ponto de equilíbrio.
4. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a definição da norma induzida dada em classe é equivalente a

$$||A|| = \sqrt{\lambda_{max}(A^t A)} \tag{6}$$

onde λ_{max} é o maior autovalor da matriz semi-definida positiva $A^t A$. Você é capaz de esboçar uma prova disso? Calcule a norma da matriz A onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

5. Se A é uma matriz tal que $A^{-1} = A^t$ mostre que $||A|| = 1$. Seria verdade que $||A|| = ||A^t||$? Mostre ou dê contra-exemplo.
6. Calcular $\exp(A)$ nos seguintes casos:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. Se $A \in \mathbb{R}^{m+n\times m+n}$ é uma matriz com estrutura de blocos diagonal, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

onde $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mostre que

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & 0 \\ 0 & \exp(A_2) \end{pmatrix} \tag{9}$$

8. calcular a exponencial da seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

9. Ache a solução da equação diferencial ordinária

$$\dot{x_1} = x_1 + 2x_2 \tag{11}$$

$$\dot{x_2} = -2x_2 \tag{12}$$

com a condição inicial: $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 2$

10. Se λ é um autovalor de uma matriz A associado ao vetor $\mathbf{v}$, qual o valor de $\exp A\mathbf{v}$?