MAP2321 - TÉCNICAS EM TEORIA DO CONTROLE - LISTA 2

1. Seja $\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$, localmente integrável$\}$ e considere um sistema de controle linear invariante no tempo $\dot{x} = Ax + Bu$, onde $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$.

Chamamos de conjunto de acessibilidade da origem em tempo T o conjunto $\mathcal{A}(0,T) = \{\int_0^T e^{A(t-s)}Bu(s)ds : u \in \mathcal{U}\}$. Mostre que se $0 < T_1 < T_2$ então $\mathcal{A}(0,T_1) \subset \mathcal{A}(0,T_2)$.

2. Prove ou dê um contra exemplo: se um sistema de controle linear invariante no tempo é controlável então ele é observável?

3. Considere, para $a \neq 0$, a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para quais $B \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ o par (A,B) é controlável?

Para quais $C \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ o par (A,C) é observável?

4. Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Mostre que a imagem de

$$l : \overbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(u_0, \ldots, u_{n-1}) \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} A^i B u_i$$

é invariante por A e contém a imagem de B. Mostre ainda que esse é o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ com essa propriedade.

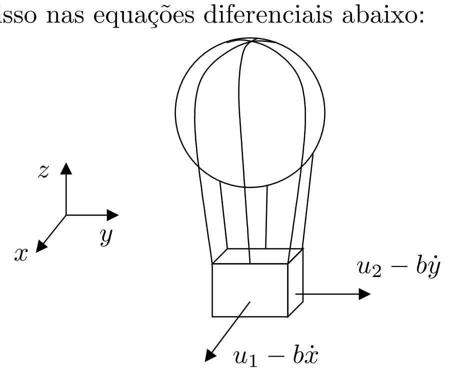
5. Considere um sistema de controle linear invariante no tempo, $\dot{x} = Ax + Bu$, com:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema não é controlável. Coloque-o na forma de Kalman.

6. Um balão de massa m flutua numa altura constante e possui 2 jatos de ar independentes que podem impulsioná-lo em direções perpendiculares com força u_1 e u_2. O ar oferece uma resistência proporcional à velocidade (coeficiente atrito viscoso igual a $b \geq 0$).

Podemos traduzir isso nas equações diferenciais abaixo:



$$m\ddot{x} = u_1 - b\dot{x}$$
$$m\ddot{y} = u_2 - b\dot{y}$$

Decida se esse sistema é controlável. E se fosse necessário que $u_1 = u_2$?

Se instalarmos um velocímetro o sistema será observável? E se instalarmos também um GPS?

Com o auxílio de uma ferramenta como Scilab (www.scilab.org), encontre a matriz de controlabilidade Q_{10} e depois projete um controle que, com o balão parado, mova-o $\sqrt{2}$ metros na diagonal e pare-o novamente em 10 segundos. Poderíamos projetar um controle mais econômico (com relação ao esforço dos propulsores) do que este?

Date: 30 de agosto de 2007.