MAP2321 - TÉCNICAS EM TEORIA DO CONTROLE - LISTA 0

1. Mostre que se A e B comutam, i.e., $AB = BA$, então $e^A B = B e^A$.

2. Mostre que se A e B comutam, i.e., $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. (Dica: mostre que $e^A e^B$ é solução de $\dot{x} = (A+B)x$)

3. Mostre que se $e^{A+B} = e^A e^B$ então A e B comutam, i.e., $AB = BA$. Note que isto é a recíproca do exercício anterior.

4. Mostre que se M é invertível então $e^{M^{-1}AM} = M^{-1} e^A M$.

5. Calcule a exponencial de:

a. $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{n\times n}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$

c. $\lambda I_n + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$

(Dica: múltiplos da identidade comutam com qualquer matriz)

d. $\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$

onde as A_i são matrizes quadradas.

e. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Dica: encontre a solução da EDO:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x$$

6. Resolva a EDO

$$\dot{x} = Ax$$
$$x(0) = x_0$$

Date: 9 de agosto de 2007.

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

seguindo os passos:

a. Encontre os autovalore e respectivos autovetores da matriz A.

b. Note que $A = Ediag(\lambda_1, \lambda_2)E^{-1}$, onde E é a matriz cuja primeira coluna é o autovetor relativo a λ_1 e a segunda coluna é o autovetor relativo a λ_2. Conclua que

$$e^{At} = e^{Ediag(\lambda_1,\lambda_2)E^{-1}t}$$

c. Calcule e^{At} e dê a solução da EDO.

7. Seguindo um racicínio análogo ao do exercício anterior, resolva a EDO

$$\dot{x} = Ax$$
$$x(0) = x_0$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

8. A dinâmica de um motor com armadura de corrente contínua é descrita pelas seguintes equações diferenciais:

$$e_b = k_1 \frac{d\theta}{dt}$$
$$e_a = L\frac{di}{dt} + Ri + e_b$$
$$k_2 i = T = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt}$$

Na tabela 1 estão descritas as constantes e variáveis desse modelo.

θ	deslocamento angular do motor
i	corrente da armadura
T	torque desenvolvido pelo motor
e_a	tensão da armadura
e_b	força contra-eletromotriz
k_1	constante positiva de força contra-eletromotriz
k_2	constante positiva de torque do motor
J	inércia do motor e da carga, suposta constante e positiva
L	coeficiente positiva de indutância da armadura
R	coeficiente positiva de resistência da armadura
b	coeficiente positiva de amortecimento viscoso do motor e da carga

Tabela 1. Constantes e variáveis do motor DC com armadura

Fazendo as substituições convenientes de modo a remover i e chamando $\dot{\theta} = \omega$, obtemos:

(1) $$LJ\ddot{\omega} + (Lb + RJ)\dot{\omega} + (Rb + k_1k_2)\omega = k_2e_a$$

Na modelagem de motores é comum despresar-se a indutância da armadura. Nesse caso a dinâmica fica descrita por uma EDO mais simples:

$$\dot{\omega} = \frac{k_2}{RJ}e_a - \frac{Rb + k_1k_2}{RJ}\omega \tag{2}$$

Em laboratório, com técnicas de identificação de sistemas, foram obtidos para um motor de testes os seguintes valores:

$$\frac{k_2}{RJ} = 1.3595 \qquad \frac{Rb + k_1k_2}{RJ} = 2.6316 \tag{3}$$

Com essas informações:

a. Escreva a equação (1) como um sistema de EDO's de ordem 1.
b. Coloque esse sistema em notação matricial.
c. Encontre a solução da parte homogênea da EDO (2) usando os valores fornecidos em (3)

Os sistemas acima pertencem a uma família de modelos que em breve será estudada nesta disciplina: sistemas lineares de controle com uma entrada e uma saída (SISO). Mas por hora basta pensar que podemos influenciar o comportamento deles escolhendo convenientemente e_a.

Para ilustrar isso suponha a seguinte situação: precisamos manter o eixo parado e, caso um distúrbio externo aplicar um torque ao eixo, voltar a sua velocidade para 0.

Se fizermos $e_a = C\omega$, para quais valores de C o sistema terá esse comportamento? (Dica: lembre-se que $e^{at} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ quando $a < 0$)