MAP0151 - Cálculo Numérico e Aplicações
Lista 7 (Correção)

(Questão 1) Recordando que, para uma função f L-períodica seu desenvolvimento em série trigonométrica até o harmônico de ordem m é dado por

$$g_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \right]$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_c^d f(x)dx$$

e, para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$,

$$a_k = \frac{2}{L} \int_c^d f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) dx$$
$$b_k = \frac{2}{L} \int_c^d f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) dx$$

onde as integrais podem ser calculadas em qualquer intervalo $[c, d]$ de comprimento L, isto é, tal que $|d - c| = L$.

Podemos ainda escrever para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ que

$$a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) = A_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x + \phi_k\right)$$

onde

$$A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$
$$\phi_k := \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$$

são respectivamente a *amplitude* e o *ângulo de fase* do k-ésimo harmônico.

Para a função f definida no enunciado, seu período é $L = 2$ e tomaremos o intervalo $[c, d] = [-1, 1]$. Vamos obter o desenvolvimento harmônico até a segunda ordem, i.e. $m = 2$. Fazendo as contas, temos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1}(1-x)dx\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{1 + 1 - \frac{1}{2}\right\} \\
&= \frac{3}{4} \\
a_1 &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos(\pi x)dx \\
&= \int_{-1}^{0}\cos(\pi x)dx + \int_{0}^{1}\cos(\pi x)dx - \int_{0}^{1} x\cos(\pi x)dx \\
&= \ldots(\text{continhas})\ldots \\
&= \frac{2}{\pi^2}
\end{aligned}$$

onde a última integral que aparece acima deve ser resolvida por partes. Da mesma maneira, obtém-se

$$\begin{aligned}
a_2 &= 0 \\
b_1 &= -\frac{1}{\pi} \\
b_2 &= \frac{1}{2\pi}
\end{aligned}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{\pi^2}\sqrt{4+\pi^2} \\
A_2 &= \frac{1}{2\pi} \\
\phi_1 &= \arctan\left(-\frac{2}{\pi}\right) \\
\phi_2 &= 0
\end{aligned}$$

(se alguém encontrar uma conta errada, favor me avisar).

Logo, o desenvolvimento em série trigonométrica até o harmônico de segunda ordem de f é

$$g_2(x) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x).$$

(Questão 2) Queremos, em cada item, encontrar a função f que interpola os pontos $(0, 2)$ e $(1, 1)$.

1. $f(x) = a + bx$ (reta). Temos:

$$\begin{aligned} f(0) &= a \\ &= 2 \\ f(1) &= a + b \\ &= 1 \end{aligned}$$

   donde temos $a = 2, b = -1$, ou seja

$$f(x) = 2 - x.$$

2. $f(x) = a + be^x$:

$$\begin{aligned} f(0) &= a + b \\ &= 2 \\ f(1) &= a + be \\ &= 1 \end{aligned}$$

   $\Rightarrow a = \frac{2e-1}{e-1}, b = -\frac{1}{e-1}$, i.e.

$$f(x) = \frac{2e-1}{e-1} - \frac{e^x}{e-1}.$$

3. $f(x) = \frac{a}{b+x}$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{a}{b} \\ &= 2 \\ f(1) &= \frac{a}{b+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   $\Rightarrow a = 2, b = 1$, i.e.

$$f(x) = \frac{2}{1+x}.$$

(Questão 3) Mesmo procedimento. Se queremos que

$$f(x) = a + b\cos\pi x + c\sin\pi x$$

interpole os pontos $(0,2), (0.5,5), (1,4)$ teremos que

$$\begin{aligned} f(0) &= a + b \\ &= 2 \\ f(0.5) &= a + c \\ &= 5 \\ f(1) &= a - b \\ &= 4 \end{aligned}$$

e, resolvendo o sistema linear correspondente, teremos

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -1 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

isto é, $f(x) = 3 - \cos\pi x + 2\sin\pi x$.

Para encontrar o polinômio interpolador p da tabela

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

notamos que por 3 pontos passamos um polinômio de grau menor ou igual a 2, isto é, o grau de p deve ser menor ou igual a 2. Vamos encontrar sua forma de Lagrange. Só para recordar, definimos

$$L_k(x) := \prod_{j \neq k} \left(\frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right), \ 1 \leq k \leq 3$$

e então o polinômio interpolador de T na forma de Lagrange fica

$$p(x) = \sum_{k=1}^{3} y_k L_k(x).$$

Efetuando os cálculos (fáceis)

$$\begin{aligned} L_1(x) &= 2(x - 0.5)(x - 1) \\ L_2(x) &= -4x(x - 1) \\ L_3(x) &= 2x(x - 0.5) \end{aligned}$$

donde, por fim,

$$p(x) = 4(x - 0.5)(x - 1) - 20x(x - 1) + 8x(x - 0.5).$$

(Questão 4) Como na questão anterior: dada a tabela

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e fazendo as continhas (simples) obtemos

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \\ L_2(x) &= -x(x-2) \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}x(x-1) \end{aligned}$$

e então o polinômio interpolador de T na forma de Lagrange fica

$$p(x) = (x-1)(x-2) - x(x-2) + 2x(x-1)$$

(Questão 5) Esta questão é mais fácil do que parece. Sabemos que um polinômio de grau menor ou igual a 3 tem a seguinte expressão:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

O que devemos fazer é determinar $a_0, \ldots, a_3$. Do Cálculo I temos que a derivada de P é

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2.$$

e utilizando os dados do problema

$$\begin{aligned} P(x_1) &= y_1 \\ P(x_2) &= y_2 \\ P'(x_1) &= z_1 \\ P'(x_2) &= z_2 \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 &= y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 &= y_2 \\ 0a_0 + a_1 + 2a_2 x_1 + 3a_3 x_1^2 &= z_1 \\ 0a_0 + a_1 + 2a_2 x_2 + 3a_3 x_2^2 &= z_2 \end{aligned}$$

onde $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ são conhecidos.

Podemos escrever o sistema linear anterior na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

e então resolvê-lo pelo MEG. Escalonado, o sistema acima fica (se não me enganei nas contas)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 & 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 & z_1 - \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \\ 0 & 0 & 0 & (x_1 - x_2)^2 & z_1 + z_2 - 2\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right) \end{array}\right]$$

e a substituição retroativa fica por conta de vocês. As simplificações envolvem divisão de polinômios – nada impossível, mas bastante trabalhoso.