MAP0151 - Cálculo Numérico e Aplicações
Lista 5 (Correção)

Neste ponto, todos já sabemos que todas as questões têm o mesmo valor, totalizando 10.0 pontos.

(Questão 1) Fiquei com vontade de fazer mais do que foi pedido: vou mostrar que a *norma* definida é, de fato, uma norma. Recordemos sua definição do curso de Álgebra Linear:

Definição 1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que a função

$$\|\cdot\| : x \in V \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$$

é uma *norma* em V se e somente se satisfaz as seguinte propriedades:

1. $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in V$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$, onde $o \in V$ é o *vetor nulo* (elemento neutro da soma vetorial);
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \forall x \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in V$.

A última propriedade da lista acima é a chamada *desigualdade triangular* (para normas).

Dessa forma, antes de falrmos de normas devemos falar de espaços vetoriais. É possível mostrar que, dado um número natural $n \leq 1$ fixado, o conjunto das matrizes $n \times n$ de entradas reais – usualmente denotado por $M_n(\mathbb{R})$ – munido da soma de matrizes tradicional e da multiplicação de matrizes por escalares tradicional forma de fato um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Já estamos em condições de entender o enunciado do problema: queremos mostrar que a função

$$\|\cdot\| : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \|A\| := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $M_n(\mathbb{R})$. Vamos então verificar as quatro propriedades que $\|\cdot\|$ deve satisfazer para ser uma norma sobre $M_n(\mathbb{R})$.

Sejam $A := (a_{ij})_{n\times n}$ e $B := (b_{ij})_{n\times n}$ duas matrizes $n \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar qualquer.

1. Da definição, temos que $\|A\|$ é o *maior valor dentre várias somas de módulos de números reais*: módulos de números reais são maiores que ou iguais a zero, então somas de módulos também o são, assim como o máximo dessas somas. Logo $\|A\| \geq 0$.
2. Seja $O := (0)_{n\times n}$ a matriz com todas as entradas nulas, que é o elemento neutro da soma de matrizes. Então

$$\begin{aligned} \|O\| &= \max \sum |0| \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Em contrapartida, se $\|A\| = 0$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \|A\| \\ &= \max \sum |a_{ij}| \end{aligned}$$

   mas se o máximo de uma coleção de números positivos é zero então todos os números da coleção são zero, isto é

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$$

   Novamente, se a soma de números positivos é zero então cada parcela é nula, donde $|a_{ij}| = 0 \ \forall i, j = 1, \ldots, n$. Por fim, o módulo de um número ser nulo implica que o número em questão é zero: $a_{ij} = 0 \ \forall i, j = 1, \ldots, n$. Mas isto quer dizer que

$$A = (0)_{n\times n} = O.$$

3. Temos que

$$\begin{aligned} \|\alpha A\| &= \max \sum |\alpha a_{ij}| \\ &= \max \left(\sum |\alpha||a_{ij}| \right) \\ &= \max \left(|\alpha| \sum |a_{ij}| \right) \\ &= |\alpha| \left(\max \sum |a_{ij}| \right) \\ &= |\alpha| \|A\|. \end{aligned}$$

Preste atenção: veja se você entendeu porquê o $|\alpha|$ pode "pular para fora" em cada passagem!

4. Agora a mais importante, a desigualdade triangular (pedida no enunciado do exercício).

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \|(a_{ij})+(b_{ij})\| \\ &= \|(a_{ij}+b_{ij})\| \\ &= \max \sum |a_{ij}+b_{ij}| = (\star). \end{aligned}$$

Vou usar agora que a desigualdade triangular vale para o módulo de números reais, isto é,

$$|a_{ij}+b_{ij}| \leq |a_{ij}|+|b_{ij}| \ \forall i,j = 1,\ldots,n.$$

donde obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} (\star) &= \max \sum |a_{ij}+b_{ij}| \\ &\leq \max \sum (|a_{ij}|+|b_{ij}|) \\ &= \max \left(\sum |a_{ij}| + \sum |b_{ij}| \right) \\ &= \left(\max \sum |a_{ij}| \right) + \left(\max \sum |b_{ij}| \right) \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

e então concluímos que $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$.

Note que eu usei, sem muito alarde, dois fatos: que o somatório de somas de parcelas é a soma dos somatórios das parcelas individuais; e que o máximo da soma de dois termos é a soma dos máximos de cada termo. Você consegue perceber onde eu usei cada uma dessas propriedades? Você consegue provar que elas valem de fato?

Vamos agora nos recordar a definição da *norma do* sup de vetores de $\mathbb{R}^n$: dado $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

(tente mostrar $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma no espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, seguindo os mesmos passos que fizemos acima). Então temos que, usando a definição de produto de uma matriz $A := (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$ por um

vetor $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ temos que Ax também é um vetor de $\mathbb{R}^n$ e portanto posso calcular $\|Ax\|_\infty$ (note a importância desta observação, que garante que o exercício faz sentido).

Então, usando mais uma vez a desigualdade triangular para o módulo de números reais (onde?) obtenho

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_\infty &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right)_{n\times 1} \right\|_\infty \\
&= \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \\
&\leq \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik} x_k| \\
&= \max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||x_k| = (\star\star)
\end{aligned}$$

sendo que na última passagem utilizei o fato de que o módulo do produto de números reais é o produto dos módulos dos fatores.

Agora, note que da definição de $\|\cdot\|_\infty$ temos que

$$|a_{ik}||x_k| \leq |a_{ik}|\|x\|_\infty \ \forall i, k = 1, \ldots, n.$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
(\star\star) &= \max_i \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||x_k| \right) \\
&\leq \max_i \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\|x\|_\infty \right) \\
&= \max_i \left(\|x\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right) \\
&= \|x\|_\infty \left(\max_i \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right) \\
&= \|x\|_\infty \|A\| \\
&= \|A\|\|x\|_\infty
\end{aligned}$$

ou seja, $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|\|x\|_\infty$.

(Questão 2) Minha função ficou assim:

```
// norma.sci

function N = norma (A)
  [nl, nc] = size(A);

  N = 0;
  for i = 1:nl do
    soma = 0;
    for j = 1:nc do
      soma = soma + abs (A(i,j));
    end
    if soma > N then
      N = soma;
    end
  end
endfunction
```

e para as matrizes

$$A_1 := \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_2 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

devolveu, corretamente,

$$\|A_1\| = 12$$
$$\|A_2\| = 4.$$

Acho que o funcionamento da função, bem como a validade das respostas, é imediato. Para aqueles que implementaram a função, não cobrarei as contas: quem conseguir implementar uma função que calcule a norma de matrizes quadradas naturalmente sabe o que está fazendo. Para quem resolver fazer as contas "na unha", naturalmente quero ver as contas feitas!

(Questão 3) Vou denotar o número de Sassenfeld de uma matriz $A_{n \times n}$ por $p(A)$. Minha função ficou assim:

```
// sassenfeld.sci

function s = sassenfeld (A)
  [nl, nc] = size(A);

  n = nl; // matriz quadrada
  p = ones (1,n);

  // calculando os p(i)'s
  for i = 1:n do
    soma = 0;
    for j = 1:n do
      if j ~= i then
        soma = soma + p(j) * abs(A(i,j)) / abs(A(i,i));
      end
    end
    p(i) = soma;
  end

  // obtendo o numero de Sassenfeld
  s = 0;
  for i = 1:n do
    if p(i) > s do
      s = p(i);
    end
  end
endfunction
```

Usei alguns truques para encurtar o código. Tente entendê-los. Para as matrizes A_1 e A_2 da questão anterior, minha função `sassenfeld.sci` devolveu

$$p(A_1) = \frac{1}{3}$$
$$p(A_2) = 0.875$$

(Questão 4) Primeiro, implementei a função `seidel_decomp.sci`, que devolve a decomposição $A = N - P$:

```
// seidel_decomp.sci

function [N, P] = seidel_decomp(A)
  [nl, nc] = size(A);
  n = nl;

  // construindo P do Metodo de Gauss-Seidel
  P = zeros (n, n);

  for i = 1:n do
    for j = (i + 1):n do
      P(i,j) = -A(i,j);
      A(i,j) = 0;
    end
  end

  // o que sobra fica na N
  N = A;
endfunction
```

Depois, utilizei o seguinte *script* para fazer os cálculos (note que usei a função `inverte.sci`, da Lista 4!!!):

```
// questao4.sce

// importando as funcoes necessarias

getf("norma.sci");
getf("seidel_decomp.sci");
getf("inverte.sci");

// declarando as matrizes

A1 = [9,1,1,1; 1,8,1,1; 1,1,7,1; 1,1,1,6];
A2 = [2,1,0,0; 1,2,1,0; 0,1,2,1; 0,0,1,2];

// computando a decomposicao N - P de cada uma

[N1, P1] = seidel_decomp(A1);
[N2, P2] = seidel_decomp(A2);
```

```
// obtendo, em cada caso, a norma de N^{-1}P

m1 = norma(inverte(N1) * P1);
m2 = norma(inverte(N2) * P2);
```

e obtive o resultado

$$\|N_1^{-1}P_1\| = \frac{1}{3}$$
$$\|N_2^{-1}P_2\| = 0.875$$

(Questão 5) Para exemplificar, verifiquemos se o fato é válido para as matrizes A_1 e A_2 das questões anteriores. De fato, com os resultados que já obtivemos nas **Questões 3 e 4** temos que

$$\|N_1^{-1}P_1\| = \frac{1}{3} = p(A_1)$$
$$\|N_2^{-1}P_2\| = 0.875 = p(A_2)$$

ou seja, a proposição é válida pelo menos para esses casos particulares.

Vamos agora demonstrar o referido fato. Antes de mais nada, vamos observar que dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ qualquer temos que

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_\infty \mid \|x\|_\infty = 1\}. \tag{1}$$

De fato, sabemos da **Questão 1** que

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|\|x\|_\infty \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

mas, se $\|x\|_\infty = 1$ temos que $\|Ax\|_\infty \leq \|A\|$ donde

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \leq \|A\|.$$

Ademais, seja $p \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|$$

e escolhamos $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ definido por

$$\bar{x}_j := \begin{cases} -1, & \text{se } a_{pj} < 0; \\ 1, & \text{se } a_{pj} \geq 0. \end{cases}$$

para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Note que neste caso $\|\bar{x}\|_\infty = 1$ e que

$$a_{pj}\bar{x}_j = |a_{pj}| \geq 0 \ \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Logo, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\bar{x}_j \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\bar{x}_j \right| \\ &\leq \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j \right| \\ &= \|A\bar{x}\|_\infty \end{aligned}$$

isto é $\|A\| \leq \|A\bar{x}\|_\infty$, mas como $\|\bar{x}\|_\infty = 1$ (como já foi observado) temos que

$$\|A\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty$$

donde segue a igualdade.

Seja agora A uma matriz $n \times n$ qualquer. De acordo com o que foi observado em (1), mostrar que

$$\|N^{-1}P\| \leq p(A)$$

é o mesmo que mostrar que

$$\sup_{\|x\|_\infty=1} \|N^{-1}Px\|_\infty \leq p(A)$$

e assim procederemos. Para $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\|_\infty = 1$ utilizemos a variável auxiliar

$$z = N^{-1}Px \Rightarrow Nz = Px.$$

Vamos escrever explicitamente a segunda igualdade. Sabemos que, denotando $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
Nz &= \left(\sum_{j=1}^{n} N_{ij} z_j \right)_{1 \leq i \leq n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{i} N_{ij} z_j + \sum_{j=i+1}^{n} N_{ij} z_j \right)_{1 \leq i \leq n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij} z_j \right)_{1 \leq i \leq n}
\end{aligned}
$$

e, de modo semelhante,

$$
\begin{aligned}
Px &= \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij} x_j \right)_{1 \leq i \leq n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{i} P_{ij} x_j + \sum_{j=i+1}^{n} P_{ij} x_j \right)_{1 \leq i \leq n} \\
&= \left(\sum_{j=i+1}^{n} (-a_{ij}) x_j \right)_{1 \leq i \leq n}
\end{aligned}
$$

donde obtemos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{i} a_{ij} z_j &= \sum_{j=i+1}^{n} (-a_{ij}) x_j \\
\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} z_j + a_{ii} z_i &= \sum_{j=i+1}^{n} (-a_{ij}) x_j \\
a_{ii} z_i &= - \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} z_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right]
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
z_i = -\frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} z_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right], \ 1 \leq i \leq n.
$$

Vou mostrar, por indução sobre i, que $|z_i| \leq p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Com efeito, para $i = 1$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \left| -\frac{1}{a_{11}} \left[\sum_{j=1}^{0} a_{1j} z_j + \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \right] \right| \\
&= \frac{1}{|a_{11}|} \left| \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j \right| \\
&\leq \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}||x_j| \\
&\leq \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|\|x\|_\infty \\
&= \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| = p_1
\end{aligned}$$

onde usamos $\|x\|_\infty = 1$ na última simplificação. Demonstrada a base da indução, suponhamos por indução que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|z_j| \leq p_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, i-1\}$. Então temos que

$$\begin{aligned}
|z_i| &= \left| -\frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} z_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right] \right| \\
&= \frac{1}{|a_{ii}|} \left| \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} z_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right| \\
&\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\left| \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} z_j \right| + \left| \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right] \\
&\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}||z_j| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}||x_j| \right] \\
&\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|p_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\|x\|_\infty \right] \\
&= \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|p_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right] = p_j
\end{aligned}$$

onde na penúltima simplificação usamos a hipótese de indução e na última simplificação usamos $\|x\|_\infty = 1$. Isto conclui a indução e prova que

$$|z_i| \leq p_i \leq p(A) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

e portanto

$$\|z\|_\infty \leq p(A).$$

Recordando no entanto que $z = N^{-1}Px$, $\|x\|_\infty = 1$ provamos, na verdade, que

$$\|N^{-1}Px\|_\infty \leq p(A), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \|x\|_\infty = 1$$

ou, ainda,

$$\sup_{\|x\|_\infty = 1} \|N^{-1}Px\|_\infty \leq p(A)$$

e então pela observação (1) temos

$$\|N^{-1}P\| \leq p(A).$$