

Notas de aula de MAE 515

Pedro Aladar Tonelli

1 de março de 2006

1 Resumo da segunda aula:

Veremos a definição de **árvore de jogo**, alguns exemplos e o conceito de **função de escolha**.

2 Árvore de jogo

Uma **árvore de jogo** é constituída por quatro elementos que denotaremos $\langle N, T, S, \Pi \rangle$ que descreveremos a seguir.

O primeiro elemento é um conjunto N finito com n elementos que chamaremos do conjunto dos jogadores.

O segundo elemento é uma árvore $T = (V, A)$.

O terceiro elemento é uma função $S : V \setminus \text{TERM}(T) \rightarrow N$. Cujo domínio é o conjunto dos vértices não terminais de T . Isto significa que cada vértice pertence a algum jogador do conjunto N .

Por fim temos Π que é chamada de função de pagamento. Π é uma função $\Pi : \text{TERM}(T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e representa o ganho de cada jogador ao final do jogo.

Uma árvore de jogo é um modelo do seguinte jogo: o jogador de N que possui a raiz começa o jogo escolhendo um filho deste vértice. Em seguida, o jogador que possui este vértice escolhido realiza a escolha de um dos seus filhos e assim por diante até que es chegue a um vértice terminal e o ganho de cada um é apurado de acordo com a função Π .

Uma seqüência de escolhas até um determinado vértice de T é um **histórico** do jogo até ali. Como para cada vértice só existe um único caminho da raiz ao vértice então identificaremos cada vértice com um **histórico** do jogo.

Observe que num jogo de xadrez, por exemplo, o histórico da partida não é apenas a posição apresentada, mas elas e todas as jogadas que fizeram a partida chegar a esta posição. Assim a posição não é um vértice de uma árvore uma vez que diferentes seqüências de jogadas podem levar a mesma posição.

Note também que o jogador que possui um determinado vértice e sabendo que esta naquele vértice ele conhece o histórico do jogo até ali, então este modelo de jogo é chamado de jogo com **informação perfeita**.

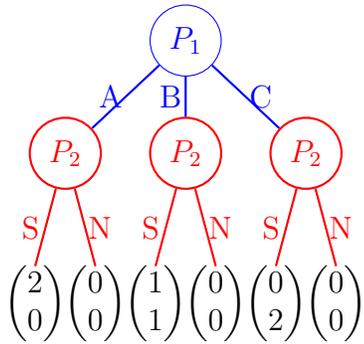
3 Conceito de estratégia

O principal conceito de solução em teoria dos jogos está baseado no conceito de estratégia. Num jogo descrito por uma árvore de jogo a idéia de estratégia de um jogador i é sua definição antecipada de qual será sua ação nos momentos do jogo em que lhe toque tomar uma ação. Vamos começar com uma idéia primitiva do que seria então uma estratégia para o jogador i e em seguida discutir melhoramentos.

Dada uma árvore de jogo (N, T, S, Π) , vamos denotar por V_i o conjunto dos vértices que pertencem ao jogador i . Uma **função de escolha** para o jogador i é uma função $E : V_i \rightarrow V$ que satisfaça a condição $(v, E(v)) \in A$, isto é E seleciona, para cada vértice v pertencente a i , um filho deste vértice de acordo com a árvore T .

Note que em nosso caso estamos representando apenas jogos finitos, assim cada jogador também tem um número finito de funções de escolhas a sua disposição.

Uma n -upla (E_1, \dots, E_n) de funções de escolha é chamada de um **perfil** do jogo. Aqui cada E_i é uma função de escolha do jogador i . Note que este perfil determina um caminho da raiz até um ponto terminal da árvore. De fato, a raiz r pertence a algum jogador k . A função de escolha E_k então escolhe um vértice $v = E_k(r)$. Este vértice v , ou é terminal, ou pertence a algum jogador l . Neste último caso a função de escolha E_l escolhe um outro vértice $u = E_l(v)$ e assim por diante até chegarmos a um vértice terminal t onde será apurado os ganhos através de $\Pi(t)$. Assim, cada perfil (E_1, \dots, E_n) determina um único caminho da raiz até um ponto terminal e portanto um vetor de ganho de \mathbb{R}^n que também chamaremos de $\Pi(E_1, \dots, E_n)$.



Exemplo: Dois jogadores, P_1 e P_2 , disputam a posse de dois objetos muito querido pelos dois. Para decidir sobre a distribuição dos objetos decidem fazer o seguinte jogo: o jogador P_1 propõe uma distribuição e o jogador P_2 aceita ou não a distribuição proposta. A função de pagamento está explicitada na árvore. Quais são as funções de escolha de P_1 ? E de P_2 ?