

MAP0217 - Cálculo Diferencial
MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V
1a. Lista

(Não foi revisada, portanto, mantenham o senso crítico aguçado!)

O monitor escolherá alguns exercícios para entrega.

2^o Semestre de 2018

Exercício 1 Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$. Mostre que:

- (a) A° é aberto.
- (b) $\overline{A}$ é fechado.
- (c) A° é a união de todos os abertos contidos em A .
- (d) $\overline{A}$ é a intersecção de todos os fechados que contêm A .

Exercício 2 Mostre que se $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ for contínua em $\bar{x}$ e $f(\bar{x}) \neq 0$ então existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq 0, \forall x \in B_r(\bar{x})$.

Exercício 3 Sejam

$$\begin{aligned} f : \quad A \subset \mathbf{R}^p &\longrightarrow \mathbf{R}^q \\ x = (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x)) \end{aligned}$$

e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in A$. Mostre que são equivalentes:

- (i) f é contínua em $\bar{x}$.
- (ii) Cada f_i é contínua em $\bar{x}$.

Exercício 4 Sejam (M, d) um espaço métrico, $A \subset M$ não vazio, e $\bar{x} \in A$. Use a caracterização de continuidade por sequências para provar que

“Se $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}$ são contínuas em $\bar{x}$ e $g(\bar{x}) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é contínua em $\bar{x}$.”

Exercício 5 Decida em cada item se a função dada é ou não contínua na origem:

- (a) $H(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
- (b) $K(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Exercício 6 Seja $f(x, y) = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}, (x, y) \neq (0, 0)$. Determinar o limite de f quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo da reta $y = mx$. É possível definir $f(0, 0)$ de modo que f seja contínua em $(0, 0)$?

Exercício 7 Sejam $M = \mathbf{R}^n$ com a métrica usual d e $N = \mathbf{R}^n$ com a métrica discreta d_* , e sejam $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow M$ definidas por $f(x) = x, \forall x \in M$ e $g(x) = x, \forall x \in N$.

- (a) f é contínua?
- (b) g é contínua?

Exercício 8 Mostre que em $\mathbf{R}^2$ com a métrica discreta d_* , o quadrado fechado e limitado $[0, 1] \times [0, 1]$ não é compacto. Caracterize os compactos de $(\mathbf{R}^2, d_*)$.

Exercício 9 Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que se $K \subset M$ é compacto e $F \subset K$ é fechado não vazio, então F é compacto.

Exercício 10 Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$, com a norma e a distância associadas $\| \cdot \|$ e d respectivamente, definidas como usual por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \text{ e } d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y | x - y \rangle}.$$

Mostre que se V tem dimensão finita, então a bola fechada $B_r[\bar{x}]$ é compacta no espaço métrico (V, d) .

Exercício 11 Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que se $K \subset M$ é compacto, então K é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em K é convergente para algum ponto de K .

Exercício 12 Considere o conjunto dos números racionais $\mathbf{Q}$ com a métrica usual dada por $d(x, y) = |x - y|$.

- (a) Dê um exemplo de subconjunto infinito limitado de $\mathbf{Q}$ que seja compacto (no espaço métrico $(\mathbf{Q}, d)$). Justifique sua resposta.
- (b) Dê um exemplo de subconjunto infinito limitado de $\mathbf{Q}$ que não seja compacto (no espaço métrico $(\mathbf{Q}, d)$). Justifique sua resposta.
- (c) Todo subconjunto não vazio de $\mathbf{Q}$ fechado e limitado é compacto (no espaço métrico $(\mathbf{Q}, d)$)? Justifique sua resposta.

Exercício 13 Considere o conjunto dos números racionais $\mathbf{Q}$ com a métrica usual dada por $d(x, y) = |x - y|$.

Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa, e justifique:

Todo subconjunto infinito e limitado do espaço métrico $(\mathbf{Q}, d)$ tem um ponto de acumulação em $\mathbf{Q}$.

Exercício 14 Seja (M, d) um espaço métrico contendo um subconjunto infinito A satisfazendo $d(x, y) = 1, \forall x, y \in A$ tal que $x \neq y$.

Mostre que se $U \subset M$ contém A , então U não é compacto.

Exercício 15 Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$ compacto.

Mostre que dado $\delta > 0$ existem um subconjunto finito $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tal que para todo par de pontos $x, y \in A$ satisfazendo $d(x, y) < \frac{\delta}{2}$, existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\{x, y\} \subset B_\delta(a_i)$.

Exercício 16 Seja (M, d) um espaço métrico e $K \subset M$ compacto.

Mostre que se $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ é contínua, então $f(X)$ é fechado para cada $X \subset K$ fechado.

Exercício 17 Prove a seguinte proposição:

“Sejam $(M, d), (N, \tilde{d})$ espaços métricos suponha que M é compacto. Seja $f : M \rightarrow N$ contínua, bijetora. Então $f^{-1} : N \rightarrow M$ é contínua.”

Dê um exemplo para mostrar que não podemos abrir mão da compacidade de M na proposição anterior.

Exercício 18 Mostre que o conjunto

$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^3 y \cos(e^{x+2y}) > 0 \quad \text{e} \quad \sin(x^3 y + \ln(x^2 + y^4 + 2)) < 0\}$
é aberto.

Exercício 19 Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ contínua. Mostre que existe $\bar{x} \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x}), \forall x \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Exercício 20 Decida se a função $f : A \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ é ou não limitada. Justifique sua resposta.

$$f(x, y, z) = (xz^2 \cos(y^2) - ye^{xz}, x^3 z^2 + 3x^2 yz - y^3 z^3),$$

onde

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad y^2 + z^2 = 30\}.$$

Exercício 21 Seja $M = \mathbf{R}^n$ com a métrica usual d e seja $N = C([-\pi, \pi])$ com a métrica d_2 definida por $d_2(h, k) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [h(t) - k(t)]^2 dt}$.

Existe $f : M \rightarrow N$ contínua tal que $f(B_1[0]) = \mathbf{B}_1[O]$? Justifique sua resposta.

Obs.: Note que

$$B_1[0] = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x, 0) \leq 1\} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_1[O] = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ é contínua e } d_2(f, O) \leq 1\}.$$

Exercício 22 Sejam (M, d) e $(N, \tilde{d})$ espaços métricos e $f : A \subset M \rightarrow N$. Mostre que se f é uniformemente contínua e $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ é uma sequência em A e é de Cauchy, então $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Exercício 23 Seja $\gamma : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ dada por $\gamma(t) = \frac{1}{t}$. Seja $\tilde{d} : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $\tilde{d}(x, y) = |\gamma(x) - \gamma(y)|$.

(a) Mostre que $\tilde{d}$ é uma métrica em $\mathbf{R}_+^*$.

(b) $(\mathbf{R}_+^*, \tilde{d})$ é completo? Justifique sua resposta.