Quinta aula: noções de topología

Nas aula passada vimos como, em $\mathbb{R}^n$, as métricas euclidianas, da soma e do máximo são equivalentes. Vamos repetir as últimas definições e o Teorema.

0.0.1 Bolas e conjuntos abertos num espaço métrico

Seja (M, d) um espaço métrico. Para cada $m \in M$ e $\epsilon > 0 (\in \mathbb{R})$, a **bola aberta** centrada em m e com raio ϵ é o conjunto

$$B_{(m,\epsilon)} = \{p \in M \mid d(m,p) < \epsilon\} \subseteq M$$

Um subconjunto $U \subseteq M$ é **aberto em M com respeto à métrica** d se para cada $q \in U$ existe um $\epsilon(q) > 0$ tal que

$$B_{(q,\epsilon(q))} \subseteq U.$$

Isso é, cada ponto $x \in U$ é o centro de uma bola aberta centrada em x contida em U.
Exemplo: Em (M, d), a bola aberta $B_{(m,r)} = \{p \in M \mid d(m,p) < r\} \subseteq M$ é um conjunto aberto de M. De fato, se $p \in B_{(m,r)}$, então $d(m,p) < r$, e podemos definir $s = r - d(m,p) > 0$. Assim temos $B_{(p,s)} \subset B_{(m,r)}$, já que se $q \in B_{(p,s)}$, $d(p,q) < s$, e portanto $d(m,q) \leq d(m,p)+d(p,q) < d(m,p)+s = r$.

Seja M um conjunto, e sejam d, d' duas métricas em M. Dizemos que d e d' são **topologicamente equivalentes**, e escrevemos $d \sim_{top} d'$, se para cada $U \subseteq M$ temos

$$U \text{ aberto em } (M,d) \;\Leftrightarrow\; U \text{ aberto em } (M,d').$$

0.0.2 Equivalência das normas euclidiana, da soma e do máximo em $\mathbb{R}^n$

Proposição 0.1. *Sejam d_E, d_S, e d_M as métricas euclidiana, da soma e do máximo respectivamente, em $\mathbb{R}^n$. Então, para cada $x = (x_1, .., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$d_M(x,y) \leq d_E(x,y) \leq d_S(x,y) \leq n * d_M(x,y).$$

Corolário 0.2. *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$,*

$$B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})} \subseteq B^S_{(x,\epsilon)} \subseteq B^E_{(x,\epsilon)} \subseteq B^M_{(x,\epsilon)}.$$

Demonstração. Queremos demonstrar que, se $y \in B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})}$, então $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$, e então $y \in B^E_{(x,\epsilon)}$, e então $y \in B^M_{(x,\epsilon)}$.

Començamos vendo que, se $y \in B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})}$, então $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$. Temos que $y \in B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})}$ quando $d_M(x,y) = max_i\{|x_1 - y_1|, .., |x_n - y_n|\} \leq \frac{\epsilon}{n}$, e queremos ver que $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$, isso é, que $d_S(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq \epsilon$. Pela Proposição anterior,

$$d_S(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq$$

$$\leq n * max_i\{|x_1 - y_1|, .., |x_n - y_n|\} = n * d_M(x,y) \leq n * \frac{\epsilon}{n} = \epsilon,$$

e então $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$.

Por outro lado, $y \in B^S_{(x,\epsilon)}$ quando $d_S(x,y) \leq \epsilon$, e temos pela Proposição anterior:

$$d_E(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + .. + (x_n - y_n)^2} \leq |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq \epsilon,$$

e assim $y \in B^E_{(x,\epsilon)}$.

Finalmente, temos que

$$d_M(x,y) = max_i\{|x_1 - y_1|, .., |x_n - y_n|\} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + .. + (x_n - y_n)^2} = d_E(x,y) \leq \epsilon,$$

e então $y \in B^M_{(x,\epsilon)}$ □

Teorema 0.3. *Sejam d_E, d_S, e d_M as métricas euclidiana, da soma e do máximo respectivamente, em $\mathbb{R}^n$. Então*

$$d_M \sim_{top} d_E \sim_{top} d_S$$

Demonstração. Queremos demonstrar que:

U aberto em $(\mathbb{R}^n, d_M)$ $\Leftrightarrow$ U aberto em $(\mathbb{R}^n, d_E)$ $\Leftrightarrow$ U aberto em $(\mathbb{R}^n, d_S)$.

Lembramos que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é **aberto em $\mathbb{R}^n$ com respeto à métrica** d se cada $x \in U$ é o centro de uma bola aberta contida em U. Então, queremos demonstrar que:

1. se $\exists \epsilon(x) > 0$ tal que $x \in U$ é o centro de uma bola $B^M_{(x,\epsilon(x))} \subset U$,

2. então $\exists\epsilon'(x) > 0$ tal que x é o centro de uma bola $B^E_{(x,\epsilon'(x))} \subset U$,

3. então $\exists\epsilon''(x) > 0$ tal que x é o centro de uma bola $B^S_{(x,\epsilon''(x))} \subset U$,

4. então $\exists\epsilon'''(x) > 0$ tal que x é o centro de uma bola $B^M_{(x,\epsilon'''(x))} \subset U$.

Pelo Corolário anterior temos que, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$,

$$B^M_{(x,\frac{\epsilon}{n})} \subseteq B^S_{(x,\epsilon)} \subseteq B^E_{(x,\epsilon)} \subseteq B^M_{(x,\epsilon)}$$

o que acaba a prova. □

0.0.3 Conjuntos fechados

Seja (M, d) um espaço métrico. Um conjunto $U \subseteq M$ diz-se **fechado** em M c.r.à d quando o complementário $M \setminus U$ é aberto em M c.r.à d.
Exemplos

1. $\mathbb{R}^n$ é fechado em qualquer métrica (de $\mathbb{R}^n$), já que $\emptyset$ é aberto em qualquer métrica (de $\mathbb{R}^n$). Similmente, $\emptyset$ é fechado em qualquer métrica de $\mathbb{R}^n$ já que $\mathbb{R}^n$ é aberto em qualquer métrica de $\mathbb{R}^n$.

2. Más em geral, se (M, d) é um espaço métrico, $\emptyset$ é fechado em M c.r.à d, já que M é aberto em M com respeito a d, e M é fechado em M c.r.à d já que $\emptyset$ é aberto em M c.r.á d.

3. Seja (M, d) um espaço métrico, a bola fechada centrada em $m \in M$ e com raio $r > 0$
$$B^d_{(m,r)} = \{p \in M \mid d(m, p) \leq r\}$$
é fechada em M c.r.á d, pois $A = M \setminus B^d_{(m,r)}$ é aberto. De fato, se $p \in A$, então $d(m, p) > r$, e assim $s = d(m, p) - r > 0$. Assim, $B^d_{(p,s/2)} \subseteq A$. (Também $B^d_{(p,s)} \subseteq A$).

Observe que fechado não é o oposto de aberto: em $(\mathbb{R}, d_E)$ o conjunto $(0, 1]$ não é aberto nem fechado, em quanto $\emptyset$ é aberto e fechado.

0.0.4 Propriedades dos conjuntos abertos e fechados

Vimos que, se (M, d) é um espaço métrico, $U \subseteq M$ é aberto quando cada $p \in U$ é o centro de uma bola aberta interamente contida em U.

Teorema 0.4. *Seja (M, d) um espaço métrico, e seja $\mathcal{O}$ o conjunto de todos os conjuntos abertos de M, c.r.à métrica d. Então:*

1. *M e $\emptyset$ são elementos de $\mathcal{O}$,*

2. *se $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{O}$, então $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$,*

3. *se $U_1, ..., U_n \in \mathcal{O}$, então $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$.*

Demonstração.

1. Se M não fosse aberto, então $\exists m \in M$, $\epsilon > 0$ tal que $B_{(m,\epsilon)}$ não pertenece à M. Então existe $p \in M$ tal que $p \in B_{(m,\epsilon)} \setminus M$, contradição. O conjunto vacío é aberto por definição, por não ter elementos.

2. Seja $V = \bigcap_{i=1}^n U_i$, então $V \subseteq M$ (já que é união de conjuntos de M). Queremos ver que todo $v \in V$ é o centro de uma bola aberta contida em V. Já que $v \in V = \bigcap_{i=1}^n U_i$ existe pelo menos um conjunto $U_{\hat{i}} \subseteq V$ t. q. $v \in U_{\hat{i}}$. Já que $U_{\hat{i}}$ é aberto, existe $r > 0$ tal que
$$B^d_{(v,r)} \subseteq U_{\hat{i}} \subseteq V.$$

3. Seja agora $V = \bigcap_{i=1}^n U_i$, e seja $v \in V$. Então $v \in U_i$ para cada i, e então para cada i existe um r_i tal que $B_{(v,r_i)} \subseteq U_i$. Seja $r = \min_i\{r_i\}$, então para cada i temos $B_{(v,r)} \subseteq B_{(v,r_i)}$, e assim $B_{(v,r)} \subseteq V$.

□

Percebam que a interseção de uma família infinita de abertos não é necessariamente aberta. Por exemplo, considere $(\mathbb{R}, d_E)$, e seja $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Então
$$\bigcap_n U_n = \{0\},$$
que na métrica euclidiana não é aberto.

Similmente, temos as seguintes propriedades dos conjuntos fechados:

Proposição 0.5. *Seja (M, d) um espaço métrico, então:*

1. *M e $\emptyset$ são conjuntos fechados em (M, d),*

2. *se $U_1, ..., U_n$ são conjuntos fechados de (M, d), então $\bigcup_{i=1}^n$ é um conjunto fechado em (M, d).*

3. *se $\{U_i\}_{i\in I}$ são conjuntos fechados de (M, d), então $\bigcap_{i\in I} U_i$ é um conjunto fechado em (M, d).*

0.0.5 Topología

Se fosse um curso de topología, a gente diría que **os conjuntos abertos de M, induzidos pela métrica d, formam uma topología de M.**

Definição 0.6. Seja X um conjunto. Uma **topología** sobre X é um conjunto $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tal que:

1. X e $\emptyset$ são elementos de $\mathcal{T}$,
2. se $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$, então $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,
3. se $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$, então $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Nesse caso, chamamos de $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico.

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um conjunto $U \subseteq X$ é **aberto** c.r.à $\mathcal{T}$ quando $U \in \mathcal{T}$, e é **fechado** quando $X \setminus U \in \mathcal{T}$.

Então, se (M, d) é um espaço métrico, e $\mathcal{T}$ é o conjunto de todos os conjuntos abertos de M, c.r.à métrica d, então $\mathcal{T}$ é uma topología para M. Isso é: **a métrica induz uma topología**.
Se (M, d) é um espaço métrico e d' é uma métrica topologicamente equivalente à d, então d e d' definem os mesmos abertos, e assim d e d' definem a mesma topología sobre M.

Por outro lado, não toda topología vem de uma métrica. **Exemplos**

1. Seja X um conjunto qualquer, e seja $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Então $\mathcal{T}$ é uma topología, a topología **indiscreta**.
2. Seja $X = \mathbb{R}$, e $\mathcal{T}$ o conjunto contendo $\mathbb{R}$, $\emptyset$, e todo conjunto da forma (x, ∞), $x \in \mathbb{R}$. Então $\mathcal{T}$ é uma topología (notem que $(0, 1)$ não é aberto nessa topología)

0.0.6 Noções de topología num espaço métrico

Seja (M, d) um espaço métrico, e $U \subseteq M$ então:

1. O **interior** $\mathring{U}$ de U é o maior aberto de (M, d) contido em U ($\mathring{U} \subseteq U$),
2. o **fecho** $\overline{U}$ de U é o menor fechado de (M, d) contendo U ($U \subseteq \overline{U}$),
3. a **fronteira** ∂U de U é a interseção $\overline{U} \cap \overline{M \setminus U}$,

4. Seja $m \in M$, uma **vizinhança** de m é qualquer conjunto contendo um aberto contendo m

5. O ponto $m \in M$ é **exterior** à $U \subseteq M$ se existe um a vizinhança de m interamente contida em $M \setminus U$

Percebam que em ningúm lugar utilizamos a métrica de M: as mesmas definições valem para um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. Porém, num espaço métrico (M, d) podemos dar definções más geométricas, e assim dizer que:

1. $m \in U \subseteq M$ é um **ponto interior** de U quando é centro de uma bola aberta contida em U (i.e.: $\exists r > 0 \mid B_{(m,r)} \subseteq U$, e o **interior** de U é o conjunto dos pontos interiores de U,

2. m é um **ponto da fronteira** de U quando toda bola aberta centrada em m contém pelo menos um ponto em U e um ponto em $M \setminus U$, e a **fronteira** de U é o conjunto dos pontos de fronteira de U.

Exemplos:

1. O interior de $U = (0, 1]$ em $(\mathbb{R}, d_E)$ é o intervalo $(0, 1)$, o fecho é $[0, 1]$, e a fronteira é $\{0, 1\}$.

2. Consideremos o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionáis em $(\mathbb{R}, d_E)$. Então o interior de $\mathbb{Q}$ é o conjunto vacío, em quanto a fronteira de $\mathbb{Q}$ é tudo $\mathbb{R}$, já que toda bola aberta (intervalo aberto) vai conter números racionáis e irracionáis.

Percebam que estas definições **dependem do espaço métrico onde estamos! Exemplo:** O interior de $(0, 1]$ em $(\mathbb{R}, d_E)$ é $(0, 1)$, e a fronteira é $\{0, 1\}$. Porém, o interior de $(0, 1]$ em $(\mathbb{R}^2, d_E)$ é vacío, e a fronteira é $[0, 1]$.

Teorema 0.7. *Seja (M, d) um espaço métrico, e $U \subseteq M$. As seguintes são equivalentes:*

1. *U é aberto em (M, d),*

2. *cada ponto de U é um ponto interior de U,*

3. *U é uma vizinhança de cada ponto $u \in U$.*

Demonstração.

- $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$

  Se U é aberto de (M, d), então U é o maior aberto contido em U (já que trivialmente $U \subseteq U$), assim $U = \mathring{U}$. Então, se $u \in U$ também $u \in \mathring{U}$, e trivialmente U contem (é igual) a um aberto $\mathring{U}$ contendo u.

- $3 \Rightarrow 1$
  Se U é uma vizinhança de cada ponto $u \in U$, então para todo $u \in U$, U contem um aberto contendo u, e assim u é o centro de uma bola $B_{(u,r)} \subset U$, e então U é aberto.

$\square$

Teorema 0.8. *Seja (M,d) um espaço métrico. O conjunto $U \subseteq M$ é fechado se e só se contem a sua fronteira.*

Demonstração. Seja U fechado em M, e seja $u \in \partial U$. Se $u \notin U$, então $u \in M \setminus U$, que é aberto. Assim, posso achar uma bola aberta centrada em u completamente contida em $M \setminus U$. Más $u \in \partial U$, contradição!

Por outro lado, seja U um conjunto contendo todo suo ponto de fronteira. Se $p \notin U$, então $p \notin \partial U$, e então existe uma bola centrada em p contida interamente em $M \setminus U$ (isso é, p é um ponto exterior à U), e assim $M \setminus U$ é aberto, o que faz U fechado.

$\square$

Topología induzida

Seja (M,d) um espaço métrico, e $U \subset M$. Então

$$d_| : U \times U \to \mathbb{R}$$

é uma métrica sobre U, a métrica induzida. Assim, $(U, d_|)$ (que escrevemos simplesmente (U,d) para não ser pessados) é um espaço métrico.

Seja $A \subseteq U$. Notem que a definição de **aberto** depende do espaço métrico, assim, em (U,d):

- $A \subseteq U$ é aberto em (U,d) se cada $a \in A$ é o centro de uma bola aberta $B_{(a,r)}$ **de** M tal que $B_{(a,r)} \cap U \subset A$.

Exemplo: O interval $(0,1]$ não é aberto em $(\mathbb{R}, d_E)$. Porém, é aberto em $([0,1], d_E)$, pois $(0,1] = (0,2) \cap [0,1]$.