



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome Prova 1 - Gabarito Nº USP _____
Curso Licenciatura em Matemática Período Nocturno
Disciplina Cálculo Físico Variáveis Variáveis I Código USP MAT 2351

Data 08 / 04 / 2013 Nota _____ () Pag _____

1) Parametrize a reta r , interseção dos planos:

$$\pi_1: y = -x \quad \text{e} \quad \pi_2: z = \frac{x+y}{2}$$

$$r = \pi_1 \cap \pi_2: z = \frac{x+(-x)}{2} = 0 \Rightarrow r(t) = \underbrace{(t, -t, 0)}_{\text{paramétrica}} = \underbrace{t \cdot (1, -1, 0)}_{\text{vetorial}}$$

$$\text{ou } r(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

(b) Verifique que as direções tangentes à curva $\gamma(t) = (t, t, \sqrt{2}t)$, para $t > 0$, formam ângulo constante com a direção da reta r do item (a). Encontre esse ângulo.

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o ângulo $\theta \in [0, \pi]$ formado entre eles é dado por $\theta(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$, isto é,

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$



Dadas duas direções r_1 e r_2 , e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos respectivamente às direções r_1 e r_2 , o ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ formado entre as direções r_1 e r_2 é dado por $\theta(r_1, r_2) = \arccos\left(\left|\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}\right|\right)$,

$$\text{isto é, } \cos \theta = \left|\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}\right|$$

A direção $r(t)$ é paralela ao vetor $\gamma'(t) = (1, -1/t, \sqrt{2}/t)$ e a reta r tem direção paralela ao vetor $\vec{v} = (1, -1, 0)$. Dessa forma, o ângulo $\theta(t)$ formado entre essas duas direções é definido por

$$\cos(\theta(t)) = \frac{|\vec{v} \cdot \gamma'(t)|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\gamma'(t)\|} = \frac{|(1, -1, 0) \cdot (1, -1/t, \sqrt{2}/t)|}{\|(1, -1, 0)\| \cdot \|(1, -1/t, \sqrt{2}/t)\|} = \frac{|1 + 1/t + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1/t)^2 + (\sqrt{2}/t)^2}} =$$

$$= \frac{|1 + 1/t|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + 2/t^2}} = \frac{1 + 1/t}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + 2/t^2}} = \frac{1 + 1/t}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + 2/t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto, $\cos(\theta(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $\theta(t) = \frac{\pi}{4}, \forall t > 0$.

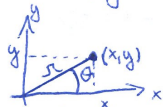
Logo, o ângulo $\theta(t)$ é constante e igual a $\frac{\pi}{4}$.

② (a) Determine a equação da reta tangente à curva $\gamma(\theta)$ dada em coordenadas polares por $r = \sin \theta$, no ponto $\gamma(\frac{\pi}{4})$, e ache a interseção dessa reta com o eixo Ox .

As coordenadas polares parametrizam o plano xy em coordenadas raio e ângulo:

• o raio é a distância do ponto (x, y) à origem, isto é,

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$



• o ângulo é o ângulo formado pelo vetor (x, y) com o eixo Ox , orientado no sentido anti-horário, isto é, $\theta(x, y) = \arctg(\frac{y}{x})$ se $x \neq 0$ e $\theta(x, y) = \pm \frac{\pi}{2}$, se $x = 0$.

Dessa forma, obtemos que $x(r, \theta) = r \cos \theta$ e $y(r, \theta) = r \sin \theta$.

Como a equação em coordenadas polares é dada por $r = r(\theta) = \sin \theta$,

$$\text{temos que } \begin{cases} x(\theta) = x(r(\theta), \theta) = r(\theta) \cdot \cos \theta = \sin \theta \cdot \cos \theta \\ y(\theta) = y(r(\theta), \theta) = r(\theta) \cdot \sin \theta = \sin^2 \theta \end{cases}$$

Portanto, a curva γ definida pela equação $r = \sin \theta$ pode ser parametrizada por $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\sin \theta \cdot \cos \theta, \sin^2 \theta)$ e, como $r(\theta) \geq 0$, temos que $\sin \theta \geq 0$ e, portanto, $\theta \in [0, \pi]$, ou seja a curva γ é a imagem da parametrização $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

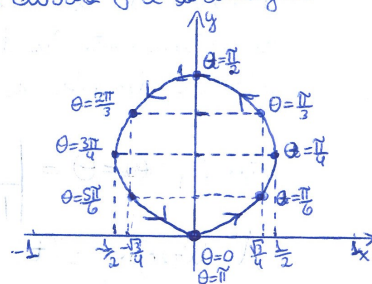
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\gamma(\theta)$	(0, 0)	($\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}$)	($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$)	($\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}$)	(0, 1)	($-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$)

$$\gamma(\theta) = (\sin \theta \cdot \cos \theta, \sin^2 \theta) \Rightarrow \gamma'(\theta) = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

$$\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ e } \gamma'(\frac{\pi}{4}) = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$$

$$\text{Eq. da reta tangente à } \gamma \text{ em } \gamma(\frac{\pi}{4}): \gamma(\frac{\pi}{4}) + \lambda \gamma'(\frac{\pi}{4}) = \underbrace{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(0, 1)}_{\text{paramétrica}} \text{ ou } \underbrace{x = \frac{1}{2}}_{\text{cartesiana}}$$

Interseção da reta $x = \frac{1}{2}$ com o eixo Ox é o ponto $(\frac{1}{2}, 0)$.

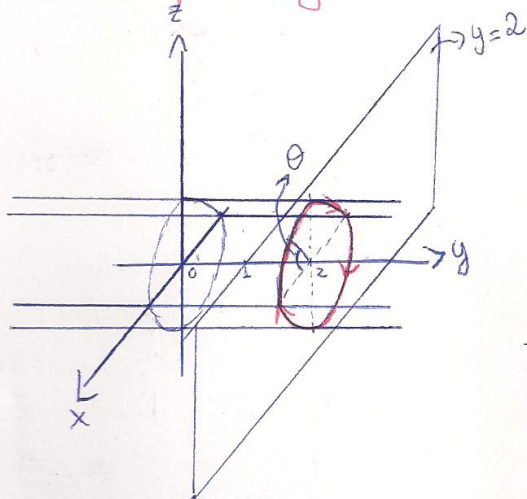


(b) Calcule o comprimento de curva entre $\gamma(0)$ e $\gamma(\frac{\pi}{2})$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|(\cos 2\theta, \sin 2\theta)\| d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(3) Dê uma parametrização da curva intersecção do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e o plano $y = 2$.



$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\theta \rightarrow (\cos \theta, 2, \sin \theta)$$

$$\gamma(\theta) = (\cos \theta, 2, \sin \theta)$$

(4) Sejam $\vec{F}(t) = (t, 1, -t)$ e $\vec{G}(t) = (1, t, 1)$. Calcule:

$$(a) \int_0^1 (\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)) dt = \int_0^1 \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ t & 1 & -t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1+t^2, -2t, t^2-1) dt =$$

$$(\int_0^1 1+t^2 dt, \int_0^1 -2t dt, \int_0^1 t^2-1 dt) = ([t+\frac{t^3}{3}]_0^1, [-t^2]_0^1, [\frac{t^3}{3}-t]_0^1) =$$

$$= (1+\frac{1^3}{3}-0, -1^2+0^2, \frac{1^3}{3}-1-0) = (\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3})$$

$$(b) \int_0^1 \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) dt = \int_0^1 (t, 1, -t) \cdot (1, t, 1) dt = \int_0^1 t + t - t dt = \int_0^1 t dt =$$

$$= [\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$