INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome: Prova 1 - Resolução Nº USP: ______
Curso: Licenciatura em Física Período: Noturno
Disciplina: Cálculo Fções Várias Variáveis I Código USP: MAT 2351

Data: 10 / 04 / 2013. Nota ______ (__________) Pag ______

(1) (a) Encontre a reta r, intersecção dos planos:

$$\Pi_1: \begin{cases} x = 1+\lambda-\mu \\ y = 1+\lambda+\mu \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad \Pi_2: \begin{cases} x = -1-\omega+\delta \\ y = -1-\omega-\delta \\ z = 1+\omega \end{cases}$$

$$r = \Pi_1 \cap \Pi_2: \begin{cases} 1+\lambda-\mu = -1-\omega+\delta \\ 1+\lambda+\mu = -1-\omega-\delta \\ 1+\lambda = 1+\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\omega+\delta-\lambda = 2-\mu \\ -\omega-\delta-\lambda = 2+\mu \\ \omega-\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\overset{\omega=\lambda}{\Rightarrow} \begin{cases} \delta - 2\lambda = 2-\mu \\ -\delta-2\lambda = 2+\mu \end{cases} \overset{\text{Soma}}{\underset{\text{linhas}}{\Longrightarrow}} -4\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \delta = 2-\mu+2\lambda = -\mu$$

$$\therefore\ r(\mu) = (1+(-1)-\mu,\ 1+(-1)+\mu,\ 1+(-1)) = (-\mu,\ \mu,\ 0) = \mu(-1,1,0)$$
$\mu \in \mathbb{R}$

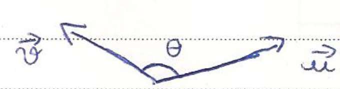
ou

$$r(\mu) = (-1-(-1)-\mu,\ -1-(-1)+\mu,\ 1+(-1)) = (-\mu,\ \mu,\ 0) = \mu(-1,1,0)$$

(b) Verifique que as direções tangentes à curva $F(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\,t)$, $t \in \mathbb{R}$, formam ângulo constante com a direção da reta r do ítem (a). Encontre esse ângulo.

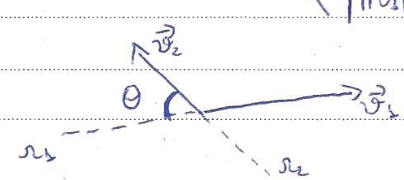
Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o ângulo $\theta \in [0,\pi]$ formado entre eles é dado por $\theta(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right)$, isto é,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \in [-1,1].$$



Dadas duas direções r_1 e r_2, e vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ paralelos respectivamente às direções r_1 e r_2, o ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ formado entre as direções r_1 e r_2 é dado por $\theta(r_1, r_2) = \arccos\left(\left|\dfrac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\|\cdot\|\vec{v}_2\|}\right|\right)$,

isto é, $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\|\cdot\|\vec{v}_2\|}\right| \in [0,1]$



A direção $s(t)$ é paralela ao vetor $F'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ e a reta r tem direção paralela ao vetor $\vec{v} = (-1, 1, 0)$. Dessa forma, o ângulo $\theta(t)$ formado por essas duas direções é definido por

$$\cos(\theta(t)) = \frac{|F'(t) \cdot \vec{v}|}{\|F'(t)\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{|(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}) \cdot (-1, 1, 0)|}{\|(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})\| \cdot \|(-1, 1, 0)\|} = \frac{|-e^t - e^{-t} + 0|}{\sqrt{(e^t)^2 + (-e^{-t})^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{|-e^t - e^{-t}|}{\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(e^t + e^{-t})^2}} = \frac{\cancel{e^t + e^{-t}}}{\sqrt{2}\,\cancel{(e^t + e^{-t})}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\cos(\theta(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donde $\theta(t) = \frac{\pi}{4}$, $\forall\, t > 0$.

Logo, o ângulo $\theta(t)$ é constante e igual a $\frac{\pi}{4}$.

(2) (a) Determine a equação da reta tangente à curva $F(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$ no ponto $F(\frac{\pi}{4})$ e ache a interseção dessa reta com o eixo Ox.

$$F'(t) = (-\sin t + 1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t, \cos t - 1 \cdot \cos t + t \cdot \sin t) = (t \cos t, t \sin t)$$

Eq. da reta tangente à curva F em $F(\frac{\pi}{4})$: $F(\frac{\pi}{4}) + \lambda F'(\frac{\pi}{4})$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\overbrace{\left(\cos\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right) + \lambda\left(\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right)}^{\text{Eq. vetorial}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \lambda\frac{\pi\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \lambda\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(\lambda) &= \lambda\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \\ y(\lambda) &= \lambda\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \end{aligned}} \text{ Eq. paramétrica}$$

$$y(\lambda) = x(\lambda) - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow r: \boxed{y = x - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow r \cap Ox = \boxed{\left\{\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}, 0\right)\right\}}$$

Eq. cartesiana

(b) Calcule o comprimento da curva entre $F(0)$ e $F(2\pi)$.

$$C=\int_0^{2\pi}\|F'(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}\|(t\cos t,\ t\sin t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2}\,dt=$$

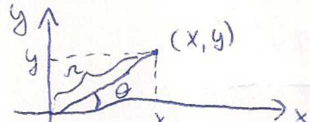
$$=\int_0^{2\pi}|t|\,dt=\int_0^{2\pi}t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{(2\pi)^2}{2}-\frac{0^2}{2}=2\pi^2-0=\boxed{2\pi^2}$$

3) Mostre que as espirais dadas em coordenadas polares por $r=\theta$ e $r=\frac{1}{\theta}$ se interceptam ortogonalmente no ponto onde $\theta=1$.

As coordenadas polares parametrizam o plano XY em coordenadas raio e ângulo:

- o raio é a distância do ponto (x,y) à origem, isto é,

$$r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$$



- o ângulo é o ângulo formado pelo vetor (x,y) com o eixo Ox, orientado no sentido anti-horário, isto é, $\theta(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ se $x\neq 0$ e $\theta(x,y)=\pm\frac{\pi}{2}$ se $x=0$.

Dessa forma, obtemos que $x(r,\theta)=r\cdot\cos\theta$ e $y(r,\theta)=r\cdot\sin\theta$.
Se uma curva é definida por $r=r(\theta)$, temos que $x(\theta)=x(r(\theta),\theta)=r(\theta)\cdot\cos\theta$ e $y(\theta)=y(r(\theta),\theta)=r(\theta)\cdot\sin\theta$

Sejam γ_1 e γ_2 as espirais definidas por $r=\theta$ e $r=\frac{1}{\theta}$ respectivamente.

Então $\gamma_1(\theta)=(x_1(\theta),y_1(\theta))=(r_1(\theta)\cdot\cos\theta,\ r_1(\theta)\cdot\sin\theta)=(\theta\cos\theta,\ \theta\sin\theta)$ e
$\gamma_2(\theta)=(x_2(\theta),y_2(\theta))=(r_2(\theta)\cdot\cos\theta,\ r_2(\theta)\cdot\sin\theta)=\left(\frac{\cos\theta}{\theta},\ \frac{\sin\theta}{\theta}\right)$; donde

$$\gamma_1'(\theta)=(1\cdot\cos\theta+\theta\cdot(-\sin\theta),\ 1\cdot\sin\theta+\theta\cdot\cos\theta)=(\cos\theta-\theta\sin\theta,\ \sin\theta+\theta\cos\theta)\ \text{e}$$

$$\gamma_2'(\theta)=\left(\frac{-\sin\theta\cdot\theta-\cos\theta\cdot 1}{\theta^2},\ \frac{\cos\theta\cdot\theta-\sin\theta\cdot 1}{\theta^2}\right)=\left(\frac{-\theta\sin\theta-\cos\theta}{\theta^2},\ \frac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}\right).$$

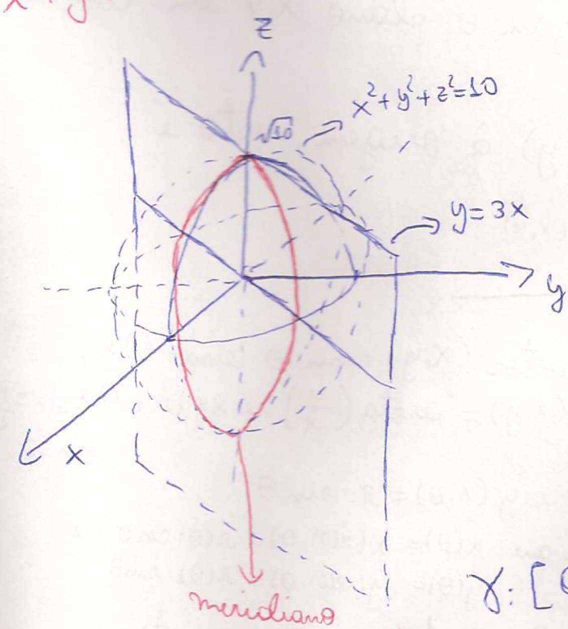
Temos que mostrar que $\underbrace{\gamma_1(1)=\gamma_2(1)}_{\text{se interceptam}}$ e que $\underbrace{\gamma_1'(1)\cdot\gamma_2'(1)=0}_{\text{ortogonais}}$

- $\gamma_1(1) = (1\cdot\cos 1, 1\cdot\sin 1) = (\cos 1, \sin 1) = \left(\frac{\cos 1}{1}, \frac{\sin 1}{1}\right) = \gamma_2(1)$ ∎

- $\gamma_1'(1)\cdot\gamma_2'(1) = (\cos 1 - \sin 1, \sin 1 + \cos 1)\cdot(-\cos 1 - \sin 1, \cos 1 - \sin 1) =$
$(\cos 1 - \sin 1)\cdot(-\cos 1 - \sin 1) + (\cos 1 + \sin 1)\cdot(\cos 1 - \sin 1) = (\cos 1 - \sin 1)\cdot[-\cos 1 - \sin 1 + \cos 1 + \sin 1] = (\cos 1 - \sin 1)\cdot[0] = 0$ ∎

Portanto, γ_1 e γ_2 se interceptam ortogonalmente em $\theta = 1$ ∎

4) Dê uma parametrização da curva interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=10$ com o plano $y=3x$.



$\gamma(t) = (\cos t, 3\cos t, \sqrt{10}\sin t)$

$$x^2 + (3x)^2 + z^2 = 10$$
$$10x^2 + z^2 = 10$$
$$\underbrace{x^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1}$$

Projeção no plano XZ é uma elipse

$x(t) = \cos t$ e $z(t) = \sqrt{10}\sin t$

$\Downarrow$

$y(t) = 3\cdot\cos t$

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (\cos t, 3\cos t, \sqrt{10}\sin t)$$