

8) Determine os pontos críticos de cada função e classifique-os:

a) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 - 15x - y + 2 = f(x, y)$

$\nabla f(x, y) = (10x - 3y - 15, -3x + 2y - 1) = (0, 0)$

$\begin{cases} 10x - 3y = 15 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 5 \Rightarrow \text{Pto. crítico: } (3, 5)$

$H(x, y) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = H(3, 5)$

$\det H(3, 5) = 20 - 9 = 11 > 0$ e $z_{xx} > 0 \Rightarrow (3, 5)$ é pto. de mínimo.

b) $z = xy(2x + 4y + 1) = 2x^2y + 4xy^2 + xy = f(x, y)$

$\nabla f(x, y) = (4xy + 4y^2 + y, 2x^2 + 8xy + x) = (0, 0)$

$\begin{cases} 4xy + 4y^2 + y = y(4x + 4y + 1) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } 4x + 4y + 1 = 0 \\ 2x^2 + 8xy + x = x(2x + 8y + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 2x + 8y + 1 = 0 \end{cases}$

Ptos. críticos:

$x = 0$ e $y = 0$ ou $y = 0$ e $2x + 8y + 1 = 0$ ou $x = 0$ e $4x + 4y + 1 = 0$ ou $4x + 4y + 1 = 0$ e $2x + 8y + 1 = 0$
 $(0, 0)$ ou $(-\frac{1}{2}, 0)$ ou $(0, -\frac{1}{4})$ ou $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$

$H(x, y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x + 8y + 1 \\ 4x + 8y + 1 & 8x \end{pmatrix}$

$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\det H(0, 0) = -1 < 0 \Rightarrow (0, 0)$ é pto. de sela

$H(-\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; $\det H(-\frac{1}{2}, 0) = -1 < 0 \Rightarrow (-\frac{1}{2}, 0)$ é pto. de sela

$H(0, -\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\det H(0, -\frac{1}{4}) = -1 < 0 \Rightarrow (0, -\frac{1}{4})$ é pto. de sela

$H(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$; $\det H(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = \frac{1}{3} > 0$ e $z_{xx} < 0 \Rightarrow (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ é pto. de máximo

5)

$$c) z = x^2y + 3xy - 3x^2 - 4x + 2y$$

$$\nabla f(x, y) = (2xy + 3y - 6x - 4, x^2 + 3x + 2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 2xy + 3y - 6x - 4 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = -2 \Rightarrow \begin{cases} -2y + 3y + 6 - 4 = 0 \\ -4y + 3y + 12 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 8 \end{cases}$$

ptos. críticos: $(-1, -2)$ e $(-2, 8)$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} y - 6 & 2x + 3 \\ 2x + 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(-1, -2) = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \det H(-1, -2) = -1 < 0 \Rightarrow (-1, -2) \text{ é pto. de sela}$$

$$H(-2, 8) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \det H(-2, 8) = -1 < 0 \Rightarrow (-2, 8) \text{ é pto. de sela}$$

9) Se a soma de três números x, y e z é 12, quais devem ser esses números para que o produto seja o máximo possível? xyz^3

$$x + y + z = 12 \Rightarrow xyz^3 = (12 - y - z) y^2 z^3 = g(y, z) = 12y^2 z^3 - y^3 z^3 - y^2 z^4$$

$$\nabla g(y, z) = (24yz^3 - 3y^2 z^3 - 2y^2 z^4, 36y^2 z^2 - 3y^3 z^2 - 4y^2 z^3) = (0, 0)$$

$$\text{ptos. críticos: } \begin{cases} yz^3(24 - 3y - 2z) = 0 \\ y^2 z^2(36 - 3y - 4z) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ ou } z = 0 \text{ ou } y = 4 \text{ e } z = 6$$

Portanto, o produto é máximo para $x = 2, y = 4$ e $z = 6$.

Obs.: Não há máximo global! Este é o máximo, usando valores positivos.

10) Mostre que uma caixa retangular com tampa e com área total de superfície fixada em um valor dado, terá volume máximo se for um cubo.

$$S = 2(xy + xz + yz) \text{ e } V = x \cdot y \cdot z \quad \left\{ \begin{array}{l} xy + xz + yz = \frac{S}{2} \\ yz = 2\lambda(y + z) \\ xz = 2\lambda(x + z) \\ xy = 2\lambda(x + y) \end{array} \right. \Rightarrow x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

$$\nabla V(x, y, z) = (yz, xz, xy) = (0, 0, 0) \Rightarrow V = 0$$

$$\text{Por Lagrange } S = 2(xy + xz + yz)$$

$$\nabla V = 2\lambda(y + z, x + z, x + y)$$

$\therefore$ A caixa de volume máximo é cúbica

6

(11) Calcule os valores máximo e mínimo de $f(x,y) = 2x^2 + y + y^2$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$

$$\nabla f(x,y) = (4x, 2y+1)$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow \nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

ptor. críticos por Lagrange $\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x = 2\lambda x \Rightarrow x=0 \text{ ou } \lambda=2 \\ 2y+1 = 2\lambda y \end{cases}$

$$x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow (0,1) \text{ e } (0,-1) \text{ são ptor. críticos}$$

$$\lambda=2 \Rightarrow 2y+1=4y \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2=\frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ são ptor. críticos}$$

$$f(x,y) = 2x^2 + y + y^2 = 1 + x^2 + y =$$

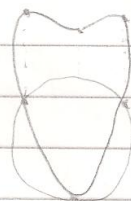
$$f(0,1) = 1 + 0^2 + 1 = 2$$

$$f(0,-1) = 1 + 0^2 - 1 = 0$$

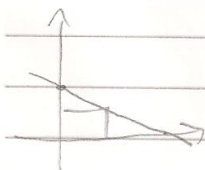
$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Valor mínimo: 0

Valor máximo: $\frac{9}{4}$



(12) Um retângulo com lados paralelos aos eixos Ox e Oy está inscrito na região do plano Oxy limitada pelos eixos e pela reta $x+2y=2$. Calcule a área máxima de um tal retângulo.



$$A = x \cdot y = (2-2y) \cdot y = -2y^2 + 2y \Rightarrow$$

$$\text{Área máxima: } y = \frac{1}{2} \text{ e } x = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Área máxima} = \frac{1}{2}}$$