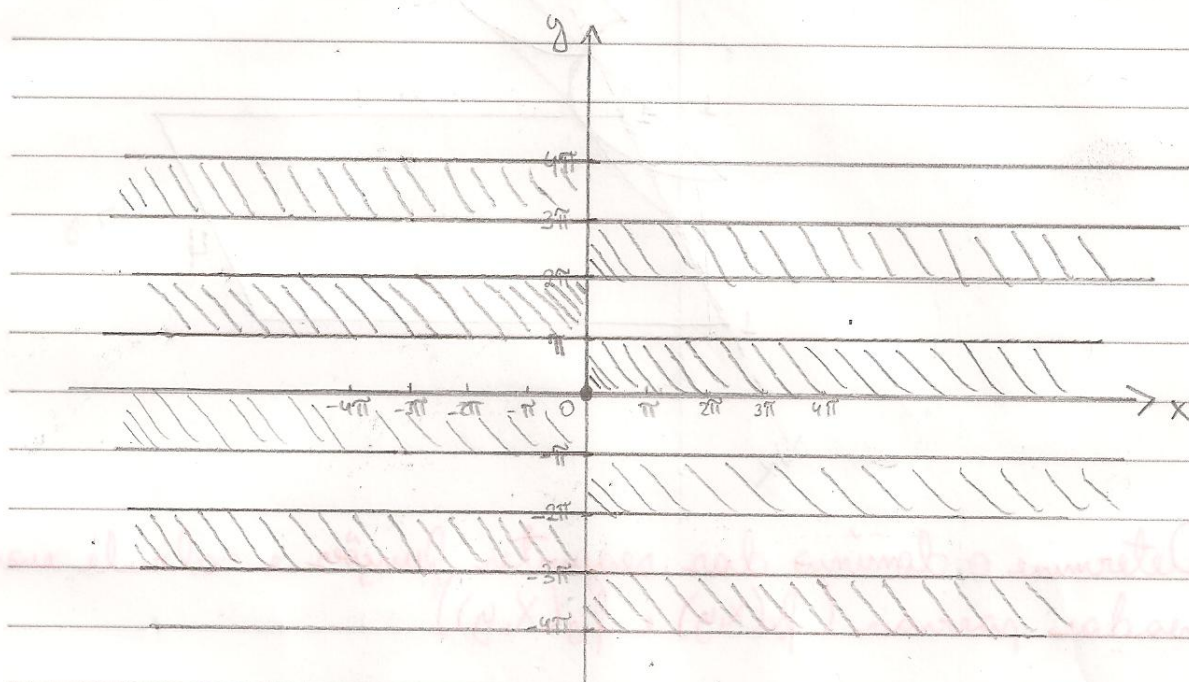


Lista 3

MAT 2351/2013

- 1) Represente graficamente o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{x \cdot \sin y}$. Qual a sua imagem?

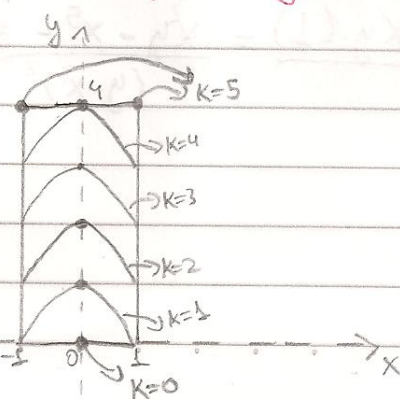
$$\text{Dom } f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot \sin y \geq 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } \sin y \geq 0 \} \cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ e } \sin y \leq 0 \}$$



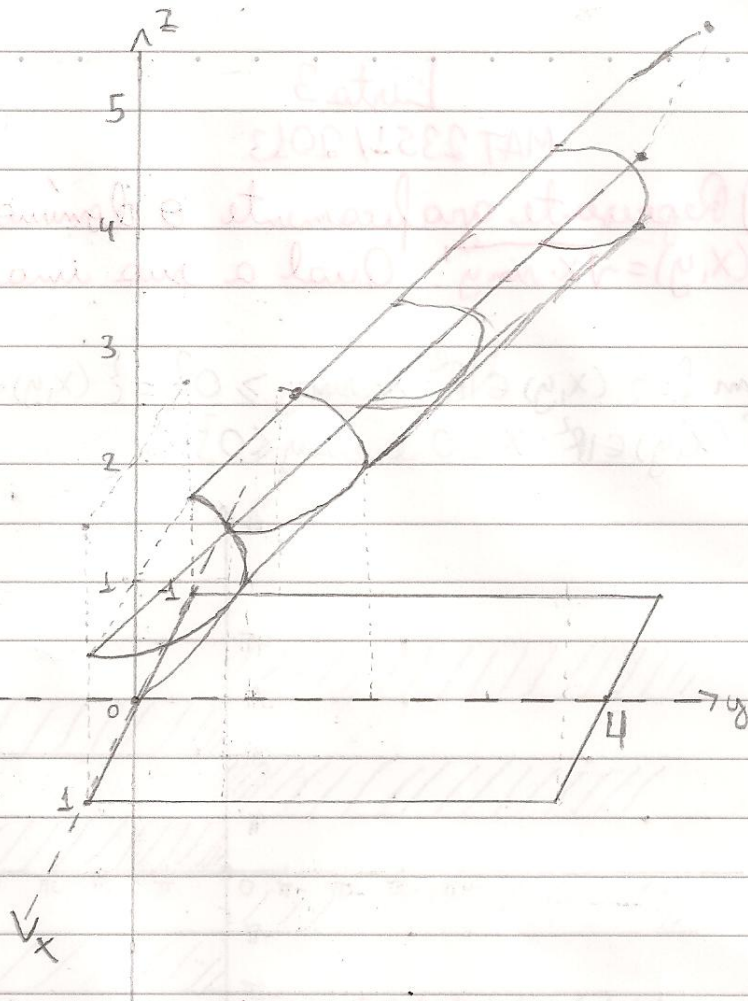
$$f(x,y) \geq 0 \text{ e } f(x, \frac{\pi}{2}) = x^2 \text{ Logo, } \text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ = \{ z \in \mathbb{R} : z \geq 0 \}$$

- 2) Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y$ com $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 4$

$$x^2 + y = k \Rightarrow y = k - x^2$$



1



③ Determine o domínio das seguintes funções e calcule suas derivadas parciais ($f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$)

f-) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{y - x^3}$ Dom $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^3\} =$

$$f_x(x,y) = \frac{2xy \cdot (y - x^3) - x^2 y \cdot (-3x^2)}{(y - x^3)^2} = \frac{2xy^2 - 2x^4 y + 3x^4 y}{(y - x^3)^2} = \frac{x^4 y + 2xy^2}{(y - x^3)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2(y - x^3) - x^2 y \cdot (1)}{(y - x^3)^2} = \frac{x^2 y - x^5 - x^2 y}{(y - x^3)^2} = \frac{-x^5}{(y - x^3)^2}$$

②

5) I - Determine uma constante λ de modo que $z = y^3 + \lambda y x^2$ satisfaga a equação de Laplace $z_{xx} + z_{yy} = 0$

$$z_{xx} = (z_x)_x = (2\lambda xy)_x = 2\lambda y$$

$$z_{yy} = (z_y)_y = (3y^2 + \lambda x^2)_y = 6y$$

$$z_{xx} + z_{yy} = 0 \Rightarrow 2\lambda y + 6y = 0 \Rightarrow y(2\lambda + 6) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$$

7) Calcule f_x e f_y em (x, y) para os casos:

$$a) f(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2} dt = \int_0^{x^2+y^2} g'(t) dt = g(x^2+y^2) - g(0)$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (g(x^2+y^2) - g(0)) = g'(x^2+y^2) \cdot 2x = 2x e^{-(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (g(x^2+y^2) - g(0)) = g'(x^2+y^2) \cdot 2y = 2y e^{-(x^2+y^2)^2}$$

9) Nos problemas abaixo, determine uma equação do plano tangente à superfície dada, no ponto indicado.

$$c) z = x^2 - 2y^2 \quad (3, 2, 1)$$

$$z = z_0 + z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0)$$

$$z = z_0 + 2x_0(x - x_0) - 4y_0(y - y_0) = 1 + 6(x - 3) - 8(y - 2)$$

$$\boxed{z = 6x - 8y - 1}$$

10) Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$

$$f_x(x, y) = y \text{ e } f_y(x, y) = x$$

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = x_0 y_0 + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) \Rightarrow z = y_0 x + x_0 y - x_0 y_0$$

$$\begin{cases} 2 = x_0 + y_0 - x_0 y_0 \Rightarrow 2y_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_0 = 2 \Rightarrow \\ 1 = x_0 - y_0 - x_0 y_0 \quad \frac{1}{2}x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_0 = 3 \end{cases}$$

$$\Pi: z = \frac{x}{2} + 3y - \frac{3}{2}$$

3

11) Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0) = (2, 1) \Rightarrow x_0 = 1 \text{ e } y_0 = \frac{1}{2}$$

$$z = f(1, \frac{1}{2}) + 2 \cdot 1(x - 1) + 2 \cdot \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}) = 1^2 + (\frac{1}{2})^2 + 2x - 2 + y - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{z = 2x + y - \frac{5}{4}}$$

12) Considere a função $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2 \cdot (x^2 + y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\pi(a, b) : z = \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{a^4 + 3a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} (x - a) - \frac{2a^3 b}{(a^2 + b^2)^2} (y - b)$$

Vamos mostrar que para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, temos que $x = y = 0$ implica $z = 0$.

$$\begin{aligned} z &= \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{a^4 + 3a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} (0 - a) - \frac{2a^3 b}{(a^2 + b^2)^2} (0 - b) = \frac{a^3}{a^2 + b^2} - \\ &- \frac{a(a^4 + 3a^2 b^2)}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{2b a^3 b}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^5 + a^3 b^2 - a^5 - 3a^3 b^2 + 2a^3 b^2}{(a^2 + b^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{O} = (0, 0, 0) \in \pi(a, b)$.

4)

L3-Comp.

10) Calcule os limites, caso existam

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$ e $\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ é limitada em $[-1, 1]$

$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$\gamma_1(t) = (t, 0)$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0 \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

18) Dadas $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir, determine se estas são contínuas e calcule, se existirem, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

a) $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$

f é contínua em $(\mathbb{R}^2)^*$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{x}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada em } [0,1]} = 0 = f(0,0)$

e, portanto, f é contínua também em $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^*$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^2+0} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{0^3}{0^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$

Como vimos em 10c), $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$. Logo, f é contínua apenas em $(\mathbb{R}^2)^*$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot (xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e} \quad (0,0) \in (\mathbb{R}^2)^*$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x \cdot (x^2+y^2) - 2y \cdot (xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^*$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cdot 0}{x^2+0} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot y}{0^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

20) Seja $f: (\mathbb{R}^2)^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Mostre que o vetor $(x,y, f(x,y))$ do gráfico de f é ortogonal ao vetor $(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), -1)$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^*$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot (xy^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy \cdot (x^2+y^2) - 2y \cdot (xy^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(x,y, \frac{xy^2}{x^2+y^2}) \cdot (\frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, -1) = \frac{xy^4 - x^3y^2 + 2x^3y^2 - x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Logo, os vetores são ortogonais.

6