

Lista 1 - Cálculo III

Exercício 1 *Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e que seja paralela à direção do vetor $\vec{v} = (-1, 1)$.*

Como $\vec{v} = (-1, 1)$ é paralelo à reta, temos que $\vec{n} = (1, 1)$ é perpendicular à reta, pois $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Logo, a reta tem equação $1.x + 1.y + c = 0$. Substituindo essa equação no ponto $(1, 2)$ dado, obtemos que $c = -3$ e, portanto, a reta tem equação $x + y - 3 = 0$ ou $y = -x + 3$.

Exercício 2 *Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, -1)$ e que é perpendicular à reta $2x + y = 1$.*

A reta $2x + y = 1$ é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (2, 1)$. Logo, a equação pedida é dada por $(1, -1) + t \cdot (2, 1); t \in \mathbb{R}$.

Exercício 3 *Determine um vetor cuja direção seja paralela à reta $3x + 2y = 2$.*

Como $\vec{n} = (3, 2)$ é perpendicular à reta, temos que $\vec{v} = (2, -3)$ é paralelo à reta, pois $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercício 4 *Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(\frac{1}{2}, 1)$ e que seja paralela à reta $3x + 2y = 2$.*

Como $\vec{v} = (-2, 3)$ é paralelo à reta, a equação pedida é dada por $(\frac{1}{2}, 1) + t \cdot (-2, 3); t \in \mathbb{R}$.

Exercício 5 *Determine um vetor cuja direção seja paralela à reta dada:*

(a) $x - 2y = 3$;

(b) $x + y = 1$;

(c) $2x - 5y = 4$;

(d) $x + 2y = 3$.

(a) Como $\vec{n} = (1, -2)$ é perpendicular à reta, temos que $\vec{v} = (2, 1)$ é paralelo à reta, pois $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$;

(b) Como $\vec{n} = (1, 1)$ é perpendicular à reta, temos que $\vec{v} = (1, -1)$ é paralelo à reta, pois $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$;

(c) Como $\vec{n} = (2, -5)$ é perpendicular à reta, temos que $\vec{v} = (5, 2)$ é paralelo à reta, pois $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$;

(d) Como $\vec{n} = (1, 2)$ é perpendicular à reta, temos que $\vec{v} = (2, -1)$ é paralelo à reta, pois $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercício 6 *Determine um vetor cuja direção seja perpendicular à reta dada:*

(a) $2x + y = 1$;

(b) $3x - y = 3$;

(c) $x + 3y = 2$;

(d) $2x - 3y = 1$.

(a) $\vec{n} = (2, 1)$ é perpendicular à reta;

(b) $\vec{n} = (3, -1)$ é perpendicular à reta;

- (c) $\vec{n} = (1, 3)$ é perpendicular à reta;
 (d) $\vec{n} = (2, -3)$ é perpendicular à reta.

Exercício 7 Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja paralela à reta dada:

(a) $(2, -5)$ e $x - y = 1$;

(b) $(1, -2)$ e $2x + y = 3$.

(a) Como $\vec{n} = (1, -1)$ é perpendicular à reta, temos que $\vec{v} = (1, 1)$ é paralelo à reta, pois $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Logo, a equação pedida é dada por $(2, -5) + t \cdot (1, 1); t \in \mathbb{R}$;

(b) Como $\vec{n} = (2, 1)$ é perpendicular à reta, temos que $\vec{v} = (1, -2)$ é paralelo à reta, pois $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Logo, a equação pedida é dada por $(1, -2) + t \cdot (1, -2); t \in \mathbb{R}$;

Exercício 8 Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular à reta dada:

(a) $(1, 2)$ e $2x + y = 3$;

(b) $(2, -2)$ e $x + 3y = 1$.

(a) O vetor $\vec{n} = (2, 1)$ é perpendicular à reta, logo a equação pedida é dada por $(1, 2) + t \cdot (2, 1); t \in \mathbb{R}$;

(b) O vetor $\vec{n} = (1, 3)$ é perpendicular à reta, logo a equação pedida é dada por $(2, -2) + t \cdot (1, 3); t \in \mathbb{R}$.

Exercício 9 Determine a equação do plano que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular à direção do vetor $\vec{n}$ dado:

(a) $(1, 1, 1)$ e $\vec{n} = (2, 1, 3)$;

(b) $(2, 1, -1)$ e $\vec{n} = (2, 1, 2)$.

(a) O vetor $\vec{n} = (2, 1, 3)$ é perpendicular ao plano, logo a equação desse plano é dada por $2x + 1y + 3z + c = 0$. Substituindo essa equação no ponto $(1, 1, 1)$ dado, obtemos que $c = -6$ e, portanto, o plano tem equação $2x + y + 3z - 6 = 0$;

(b) O vetor $\vec{n} = (2, 1, 2)$ é perpendicular ao plano, logo a equação desse plano é dada por $2x + 1y + 2z + c = 0$. Substituindo essa equação no ponto $(2, 1, -1)$ dado, obtemos que $c = -3$ e, portanto, o plano tem equação $2x + y + 2z - 3 = 0$.

Exercício 10 Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto dado e que seja perpendicular ao plano dado:

(a) $(0, 1, -1)$ e $x + 2y - z = 3$;

(b) $(2, 1, -1)$ e $2x + y + 3z = 1$.

(a) O vetor $\vec{n} = (1, 2, -1)$ é perpendicular ao plano, logo a equação pedida é dada por $(0, 1, -1) + t \cdot (1, 2, -1); t \in \mathbb{R}$;

(b) O vetor $\vec{n} = (2, 1, 3)$ é perpendicular ao plano, logo a equação pedida é dada por $(2, 1, -1) + t \cdot (2, 1, 3); t \in \mathbb{R}$.

Exercício 11 Dados os pontos $A = (-5, 2, 3)$ e $B = (4, -7, -6)$, escreva equações vetorial e paramétricas da reta determinada por A e B . O ponto $C = (3, 1, 4)$ pertence a esta reta?

O vetor $\vec{AB} = B - A = (4 - (-5), -7 - 2, -6 - 3) = (9, -9, -9)$ é paralelo à reta pedida. Podemos tomar um múltiplo qualquer de $\vec{AB}$, logo tomaremos $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.

A equação vetorial pedida é dada por $A + t\vec{v}; t \in \mathbb{R}$, ou ainda $(-5, 2, 3) + t(-1, 1, 1); t \in \mathbb{R}$.

A equação paramétrica é dada por $(-5 - t, 2 + t, 3 + t); t \in \mathbb{R}$, ou ainda $x = -5 - t, y = 2 + t, z = 3 + t; t \in \mathbb{R}$.

O ponto C não pertence à reta, pois não há parâmetro t que faça com que $C = (3, 1, 4) = (-5 - t, 2 + t, 3 + t)$.

Exercício 12 Dados os pontos $A = (0, 2, 1)$ e a reta $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2); \lambda \in \mathbb{R}$, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A .

$\sqrt{3} = d(A, r(\lambda)) \Rightarrow 3 = d^2((0, 2, 1), (\lambda, 2 - \lambda, -2 + 2\lambda)) = (\lambda - 0)^2 + (2 - \lambda - 2)^2 + (-2 + 2\lambda - 1)^2 = \lambda^2 + (-\lambda)^2 + (2\lambda - 3)^2 = \lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2 - 12\lambda + 9 \Rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$. Logo, o ponto de r que dista $\sqrt{3}$ de A é o ponto de parâmetro $\lambda = 1$, isto é $r(1) = (1, 2 - 1, -2 + 2 \cdot 1) = (1, 1, 0)$.

Exercício 13 Dados os pontos $A = (1, 0, 1), B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$, escreva equações vetorial e paramétricas do plano determinado por A, B e C .

Os vetores $\vec{u} = \vec{AB} = B - A = (2 - 1, 1 - 0, -1 - 1) = (1, 1, -2)$ e $\vec{v} = \vec{AC} = C - A = (1 - 1, -1 - 0, 0 - 1) = (0, -1, -1)$ são linearmente independentes e paralelos ao plano pedido.

Portanto, a equação vetorial pedida é dada por $A + t\vec{u} + \lambda\vec{v}; t, \lambda \in \mathbb{R}$, ou ainda $(1, 0, 1) + t(1, 1, -2) + \lambda(0, -1, -1); t, \lambda \in \mathbb{R}$.

A equação paramétrica é dada por $(1 + t, t - \lambda, 1 - 2t - \lambda); t, \lambda \in \mathbb{R}$, ou ainda $x = 1 + t, y = t - \lambda, z = 1 - 2t - \lambda; t \in \mathbb{R}$.

Exercício 14 Dados o plano $\pi : (1, 1, 3) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, 1, 3), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e a reta $r : X = (1, 1, 1) + \alpha(3, 2, 1), \alpha \in \mathbb{R}$, verifique que r é transversal a π e ache o ponto P onde r fura π .

r é transversal a π , pois os vetores $(1, -1, 1), (0, 1, 3)$ e $(3, 2, 1)$ são linearmente independentes (determinante não nulo). O ponto P onde a reta fura o plano é $P = (\frac{11}{17}, \frac{13}{17}, \frac{15}{17})$ (basta resolver o sistema 3×3).

Exercício 15 Obtenha uma equação geral do plano π que passa por $A = (1, 1, 0), B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$

O vetor $\vec{u} = \vec{BA} = A - B = (1 - 1, 1 - (-1), 0 - (-1)) = (0, 2, 1)$ é paralelo ao plano π e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes. Logo, o vetor $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u} = (4, -2, 4)$ é perpendicular ao plano π e, portanto, a equação geral do plano é dada por $4x - 2y + 4z + d = 0$. Substituindo essa equação no ponto $A = (1, 1, 0)$ dado, obtemos que $d = -2$ e, portanto, o plano tem equação $4x - 2y + 4z - 2 = 0$ ou $2x - y + 2z - 1 = 0$.

Exercício 16 Obtenha uma equação paramétrica do plano que tem por equação geral $x + 2y - z - 1 = 0$.

Temos que $z = -1 + x + 2y$, logo temos uma possível equação paramétrica dada por $x = \alpha, y = \beta, z = -1 + \alpha + 2\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercício 17 Obtenha uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano $\pi : x - y + 2z + 1 = 0$.

A equação geral do plano é dada por $x - y + 2z + d = 0$. Substituindo essa equação no ponto $P = (1, 1, 2)$ dado, obtemos que $d = -4$ e, portanto, o plano tem equação $x - y + 2z - 4 = 0$.

Exercício 18 *Dê uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta $r : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, -1)$.*

A equação geral do plano é dada por $x + 2y - z + d = 0$. Substituindo essa equação no ponto $P = (1, 0, 1)$ dado, obtemos que $d = 0$ e, portanto, o plano tem equação $x + 2y - z = 0$.

Exercício 19 *Escreva uma equação vetorial da reta que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $\pi : 2x + y - z = 2$.*

O vetor $\vec{n} = (2, 1, -1)$ é perpendicular ao plano e, portanto, paralelo à reta pedida. Logo, a equação vetorial da reta é dada por $A + t.\vec{n}; t \in \mathbb{R}$ ou ainda, $(1, 2, 3) + t.(2, 1, -1); t \in \mathbb{R}$.

Exercício 20 *Escreva equações paramétricas da reta intersecção dos planos $\pi_1 : (x, y, z) = (1 + \lambda, -2, -\lambda - \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\pi_2 : (x, y, z) = (1 + \lambda - \mu, 2\lambda + \mu, 3 - \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Resolver o sistema 3×4 mudando o nome de 2 incógnitas e deixar uma variável livre que parametriza a reta.