USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP 0216/MAT 0206 - Turma 2012254/2012243
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 1
Aluna(o): **N° USP:** **Data:21.09.2012**

OBSERVAÇÕES:
i) A prova pode ser feita a lápis.
ii) Todas as afirmações, teoremas e exercícios das listas podem ser usados nas resoluções das questões, **não é necessário** refazer o exercício na prova se vai usá-lo em alguma questão.
iii) Você precisa fazer somente 8,5 pontos na prova. No entanto, há mais que 8,5 pontos abaixo e você pode fazer toda a prova e esta será corrigida. Os pontos acima de 8,5 podem compensar caso você não tenha entregue as listas de exercícios ou caso o seu aproveitamento nas listas não seja satisfatório. A única ressalva é que cada avaliação vale no máximo 10 pontos e caso você some mais do que isso com listas e pontos na prova esta pontuação extra **não será tranferida** para as outras avaliações.

Boa prova!

(1)(2 pontos) Mostre que existe uma bijeção entre os conjuntos $[0,1]$ e $[0,1)$.
Lembrando a notação:
$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$
$[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$.

(2) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado e x e y elementos de $\mathbb{K}$.

(a) (0,5 pontos) Se x e y são positivos com $x < y$ então $y^{-1} < x^{-1}$.

(b) (0,5 pontos) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(3)(1 ponto)
Seja $S = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.
Mostre que para qualquer $\beta > 0 (\beta \in \mathbb{R})$, o conjunto $S_\beta = \{x \in S; x > \beta\}$ é **finito**.

(4)(2 pontos)
Seja $X \subset (0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ um conjunto **não enumerável**.
Mostre que existe $\rho > 0 (\rho \in \mathbb{R})$ tal que o conjunto $X_\rho = \{x \in X; x > \rho\}$ é **infinito**.

(5)(2 pontos) Seja $A = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$.

Mostre que para qualquer $z \in A$ é possível encontrar $h \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < h < 1$ e $(z+h)^2 < 2$.

Comentário: Ou seja, você está mostrando que para cada $z \in A$ existe $z' \in A$ tal que $z < z'$ e, portanto, $\sup A \notin A$.

(6)(2 pontos)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente tal que $\alpha = \sup A \notin A$. Mostre que para todo $\epsilon > 0$ o conjunto $(\alpha - \epsilon, \alpha) \cap A$ é infinito.

(7)(1 ponto)

Seja $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d), (d \geq 1, d \in \mathbb{N})$ o conjunto das partes finitas de $\mathbb{Z}^d$, ou seja, $F = \{X \subset \mathbb{Z}^d; |X| < \infty\}$. Mostre que F é enumerável.

(8)(1 ponto)

Mostre que o conjunto das parte de $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ é não enumerável.

(9)(0,5 pontos)

Mostre que para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais e $n \in \mathbb{N}$, vale:

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$