MAP0216 - Introdução à Análise Real / MAT0206 - Análise Real

Semestre: 2012-2 - Prof. Rodrigo Bissacot - IME USP

Listas de exercícios e informações sobre o curso em:
https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/anlise-2012

Lista 6:

- Sequências - Parte I.

- Topologia da Reta - Parte I

- **DATA DA ENTREGA: 16.10.2012 - Terça**

Exercício 1. Seja K um corpo ordenado e sejam a e b elementos de K. Mostre que se $a \neq b$ então:

Se $0 < \epsilon \leq \frac{|a-b|}{2}$ então $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$.

Notação: $B_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $B_\epsilon(b) = (b - \epsilon, b + \epsilon)$.

Observação: Note que este exercício nos diz é que sempre conseguimos duas bolas disjuntas, cada uma contendo um dos pontos, quando estes são distintos. A seguir veremos que as bolas abertas são conjuntos abertos, ou seja, dados dois pontos distintos conseguimos dois abertos disjuntos contendo cada um deles. Quando um *espaço topológico* satisfaz esta condição dizemos que este é *Hausdorff*.

Definição 1. *Dizemos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, sequência de números reais, é* `convergente` *quando existir um número* $a \in \mathbb{R}$ *quando:*

$$\forall\ \epsilon > 0 \textit{ existe } n_0 = n_0(\epsilon) \textit{ tal que para qualquer } n > n_0 \textit{ vale } |x_n - a| < \epsilon.$$

Neste caso dizemos que o número a é ***o*** `limite da sequência` $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Lembre que já provamos em aula que o limite é único justamente usando o exercício 1. Neste caso escrevemos* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Exercício 2. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.

Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\forall\ \epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n > n_0$ vale $|x_n - a| < \epsilon$.

(b) $\forall\ \epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n > n_0$ vale $|x_n - a| \leq \epsilon$.

(c) $\forall\ \epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale $|x_n - a| \leq \epsilon$.

(d) $\forall\ \epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale $|x_n - a| < \epsilon$.

Comentário: O exercício anterior mostra que qualquer um dos itens acima poderia ser tomado como definição de limite de uma sequência.

Exercício 3. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.

Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\forall\ \epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n > n_0$ vale $|x_n - a| < \epsilon$.

(ii) Fixado $\alpha > 0$, $\forall\ \epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que para todo $n > n_0$ vale $|x_n - a| < \alpha.\epsilon$.

Comentário: O exercício anterior tenta combater o desconforto de alguns que ficam incomodados quando terminam de provar uma convergência e no final o argumento chega numa cota do tipo 2ϵ ou 3ϵ. Como são equivalentes, isso mostra que esta constante não influencia pois o ϵ é arbitrário.

Exercício 4. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais. Mostre que se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n.y_n = 0$.

Exercício 5. Mostre se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de números reais definida por $x_n = \frac{n!}{n^n}$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Sequências monótonas

Exercício 6. Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de números reais não-descrente ($x_n \leq x_{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$) e limitada superiormente, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 7. Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de números reais não-crescente ($x_n \geq x_{n+1}, \forall\ n \in \mathbb{N}$) e limitada inferiormente, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Lema 1. *Toda sequência convergente de números reais é limitada.*

Proposição 1. *Toda sequência de números reais limitada possui uma subsequência convergente.*

Proposição 2. *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é limitada.*

Teorema 1. *Uma sequência de números reais é de Cauchy se, e somente se, é convergente.*

Exercício 8. `(Teorema do Sanduíche)`
Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais tais que:

(i) $x_n \leq y_n \leq z_n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim x_n = x$ e $\lim z_n = z$

(a) Mostre que $x \leq z$.

(b) Mostre que se $x = z$ então $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n = x$.

Exercício 9. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente de números reais tal que $\lim x_n = a > 0$. Mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n \geq n_0$. Enuncie e prove o resultado análogo quando $a < 0$.

Exercício 10. Sejam $a > b$ números reais e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente de números reais tal que $\lim x_n = a$. Mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > b$ para todo $n \geq n_0$. Enuncie e prove o resultado análogo quando $a < b$.

Definição 2. *Um* `espaço métrico` *é um par (M, d) onde M é um conjunto e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz as seguintes condições para quaisquer x, y e z em M:*

(i) $d(x, y) \geq 0$
(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$
(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

d é chamada de `métrica`.

Exemplo 1. *$M = \mathbb{R}$ onde $d(x,y) = |x-y|$.*

Verifique que d é de fato uma métrica.

Definição 3. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sequência de elementos de M, é* `de Cauchy` *quando para todo $\epsilon > 0$ existir n_0 tal que quaisquer que sejam m, n com $m \geq n_0$ e $n \geq n_0$ tivermos $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Definição 4. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sequência de elementos de M, é* `convergente` *quando existir um elemento $a \in M$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que quaisquer que seja $n \geq n_0$ tivermos $d(x_n, a) < \epsilon$.*

Definição 5. *Diremos que $A \subseteq \mathbb{R}$ é **aberto** quando para cada $x \in A$ existir $\epsilon > 0$ (que pode depender de x) tal que $B_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon) \subset A$.*

Observação 1. *Note que segue imediatamente da definição que o espaço $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são sempre abertos, o último por vacuidade.*

Definição 6. *Dados $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ a* `bola aberta` *de raio ϵ e centro x é definida como sendo o conjunto $B_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon)$. Num espaço métrico (M,d) arbitrário a definição é a mesma, ou seja, dado $x \in M$ definimos a bola aberta de raio ϵ e centro x por $B_\epsilon(x) = \{y \in M; d(x,y) < \epsilon\}$.*

Lema 2. *Dados $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ a bola aberta de raio ϵ e centro x, ou seja, o conjunto $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ é um conjunto aberto. Vale o mesmo para bolas em espaços métricos arbitrários.*

Proposição 3.

(i) Se $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ é uma família de abertos de $\mathbb{R}$ então $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$ é aberto. (pode ser uma quantidade não enumerável)

(ii) Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos abertos de $\mathbb{R}$, então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é um conjunto aberto.

Definição 7. *Diremos que $A \subseteq \mathbb{R}$ é **fechado** quando seu complementar $A^c = \mathbb{R} - A$ for aberto.*

Note que $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são fechados. E ainda, para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, o intervalo fechado $[x-\epsilon, x+\epsilon]$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$. Qualquer subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado.

Comentário: É possível mostrar que os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados são $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.

Exercício 11.

(i) Se $(A_\lambda)_{\lambda\in I}$ é uma família de fechados de $\mathbb{R}$ então $\bigcap\limits_{\lambda\in I} A_\lambda$ é fechado. (pode ser uma quantidade não enumerável)

(ii) Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ é um conjunto fechado.