MAP0216 - Introdução à Análise Real / MAT0206 - Análise Real

Semestre: 2012-2 - Prof. Rodrigo Bissacot - IME USP

Listas de exercícios e informações sobre o curso em:
https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/anlise-2012

Lista 5:

- Princípio da Boa Ordenação em $\mathbb{Z}$

- Desigualdade de Bernoulli

- Suconjuntos densos de $\mathbb{R}$

- Supremo e Ínfimo

- Intervalos

- **DATA DA ENTREGA: 02.10.2012 - Terça**

Lembrando: Caso seja preciso usar resultados intermediários que não foram trabalhados no curso você precisa provar tais afirmações a menos que seja dito que podem ser usados resultados externos ao curso. A mesma regra valerá nas provas e é usando este critério que o monitor corrigirá a lista. **Todos** os exercícios foram passados em aula há mais de uma semana, tentem se acostumar a irem fazendo tudo que for passado em aula, questões das provas também serão tiradas das questões passadas em sala de aula.

Exercício 1.
Seja X um subconjunto de $\mathbb{Z}$ limitado inferiormente, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \geq k$, $\forall\ x \in \mathbb{Z}$. Mostre que X possui um menor elemento.
Dica: Reduza o problema ao princípio da boa ordenação de $\mathbb{N}$.

Exercício 2. Seja $\mathbb{A}$ um domínio ordenado e $x \in \mathbb{A}$, $x \neq 0$.
Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$(1+x)^{2n} > 1 + 2nx.$$

Exercício 3. Dados dois elementos b e c de um corpo arquimediano (portanto a afirmação valerá para $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$) com $b > 1$. Mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > c$.

Exercício 4. Sejam $0 < \alpha < 1$ e $\epsilon > 0$ números reais, mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^n < \epsilon$.

Dica: Use o exercício anterior colocando $a = \frac{1}{b}$.

Exercício 5. Seja $S = \{m + n.\sqrt{2}; m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}$. Mostre que S é denso em $\mathbb{R}$.

Dica: Mostre que $\sqrt{2} - 1 = \alpha < 1$. Depois use o fato de que qualquer intervalo (a, b) pode ser transladado para o zero considerando por exemplo o intervalo $(a - \beta, b - \beta)$ onde $\beta = \frac{a+b}{2}$. Agora mostre que dados x e y em S temos que $x + y$ e $x.y$ são elementos de S e conclua a prova usando o exercício anterior para afirmar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \alpha^n < b - \beta$.

Exercício 6. Mostre que se $S \subset \mathbb{R}$ é um conjunto denso em $\mathbb{R}$ e c é um número real não-nulo então $c.S = \{c.x\ ; x \in S\}$ é denso em $\mathbb{R}$. Conclua a partir disso que o conjunto dos números Irracionais $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exercício 7. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ definida por
$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1+|x|}\right)$ é uma bijeção.

Exercício 8. Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e $A + B = \{x + y; x \in A \text{ e } y \in B\}$.

i) Mostre que se A e B são limitados superiormente então $A+B$ também o é. Mostre que neste caso temos $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

ii) Mostre que se A e B são limitados inferiormente então $A+B$ também o é. Mostre que neste caso temos $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Exercício 9. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) Todo subconjunto $A \subset \mathbb{K}$ limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{K}$.

ii) Todo subconjunto $B \subset \mathbb{K}$ limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{K}$.

Dica: Se não conseguir provar tente fazer o próximo exercício e use ele para resolver este.

Exercício 10. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo e seja $A \subset \mathbb{K}$ limitado inferiormente. Considere $-A = \{-x; x \in A\}$, mostre que $-A$ é limitado superiormente e que $\sup(-A) = -\inf A$.

Exercício 11. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo e seja $A \subset \mathbb{K}$ limitado, ou seja, A é limitado inferiormente e superiormente. Considere $c > 0$, $c \in \mathbb{K}$ e o conjunto $c.A = \{c.x; x \in A\}$, mostre que $c.A$ é limitado e que $\sup(c.A) = c.\sup(A)$ e $\inf(c.A) = c.\inf A$. Enuncie e prove o que ocorre quando $c < 0$.

Exercício 12. Sejam A e B subconjuntos limitados e não vazios de $[0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Mostre que o conjunto $A.B = \{x.y; x \in A \text{ e } y \in B\}$ é limitado, que $\sup A.B = \sup A. \sup B$ e $\inf A.B = \inf A. \inf B$.

Exercício 13.

Definição 1. *Um subconjunto I de $\mathbb{R}$ é dito um intervalo quando dados quaisquer a e b em I temos que $x \in I$ sempre que $a \leq x \leq b$.*

a) Mostre que se A e B são intervalos então $A \cap B$ é o conjunto vazio ou é um intervalo. Vale a mesma coisa para $A \cup B$?

b) Mostre que se A e B são intervalos tais que $A \cap B \neq \emptyset$ então $A \cup B$ é um intervalo.

c) Mostre que um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é sempre de igual a um conjunto da seguinte lista:

$\mathbb{R}, (a, +\infty), [a, +\infty), (+\infty, a), (+\infty, a], (a, b), (a, b], [a, b), [a, b].$

Dica: Separe nos casos onde I é limitado superiormente/inferiormente, analisando os casos onde o supremo/ infimo pertence ou não ao intervalo.