MAP0216 - Introdução à Análise Real / MAT0206 - Análise Real

Semestre: 2012-2 - Prof. Rodrigo Bissacot - IME USP

Listas de exercícios e informações sobre o curso em:
https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/anlise-2012

Lista 3:

- Relação de equivalência

- Inteiros e Racionais

- Corpos e Domínios de Integridade

- Anéis e Corpos ordenados

- Função módulo

- Números Algébricos e Transcendentes

- **DATA DA ENTREGA: 18.09.2012 - Terça**
(Vamos tentar voltar a data de entrega de listas para às terças, no entanto, será entregue esta semana uma outra lista para ser entregue no dia da prova, dia 21 de setembro, próxima sexta).

Lembrando: Caso seja preciso usar resultados intermediários que não foram trabalhados no curso você precisa provar tais afirmações a menos que seja dito que podem ser usados resultados externos ao curso como será feito abaixo no caso do Teorema Fundamental da Aritmética. A mesma regra valerá nas provas e é usando este critério que o monitor corrigirá a lista. Vários dos exercícios foram passados em aula, tentem se acostumar a irem fazendo tudo que for passado em aula, questões das provas também serão tiradas das questões passadas em sala de aula.

Esta lista tem o objetivo de introduzir um pouco de álgebra aos estudantes que nunca estudaram este tema.

Exercício 1.
Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X.
Definindo $\overline{x} = \{y \in X; x \sim y\}$ *a classe de equivalência do elemento* x, mostre que $x \nsim y \Leftrightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$.

Exercício 2. Seja X um conjunto e $(X_i)_{i\in I}$ uma coleção de subconjuntos de X que forme uma partição de X, ou seja, a união dos conjuntos é igual ao conjunto X, são todos não-vazios e a coleção é disjunta:

$$i)\ X_i \neq \varnothing, \forall\ i \in I; \quad i)\ X_i \cap X_j = \varnothing \text{ se } i \neq j; \quad iii) \bigcup_{i\in I} X_i = X.$$

Mostre que a relação definida por $x \sim y$ quando existir $i \in I$ tal que $x \in X_i$ e $y \in X_i$ é uma relação de equivalência.

Comentário: O que os exercícios 1 e 2 nos dizem é que uma relação de equivalência define uma partição (as classes dos elementos) e que uma partição define uma relação de equivalência.

Exercício 3. (Sistemas Dinâmicos) Seja $f : X \to X$ uma função. A *órbita de* $x \in X$ é definida por $\mathcal{O}_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\} = \{f^n(x); n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Mostre que a relação definida por $x \sim y$ quando $\mathcal{O}_f(x) \cap \mathcal{O}_f(y) \neq \varnothing$ é uma relação de equivalência.

Anéis e Corpos Ordenados

Definição 1. *Vamos dizer que um anel A comutativo e com unidade é um anel ordenado quando existir um subconjunto P cujos elementos* ***não nulos*** *chamaremos de positivos tal que:*

i) $x \in P$ e $y \in P \Rightarrow x + y \in P$ (soma de positivos é positivo)

ii) $x \in P$ e $y \in P \Rightarrow x.y \in P$ (produto de positivos é positivo)

iii) $A = -P \cup \{0\} \cup P$

Obs: $-P = \{-p\ ; p \in P\}$.

Quando A for um domínio de integridade diremos que A é um *domínio ordenado.*

Exemplo de domínio ordenado: $\mathbb{Z}$ (o conjunto dos inteiros).

Quando tivermos um corpo $\mathbb{K}$ satisfazendo as condições acima (possui um subconjunto satisfazendo i), ii) e iii)) diremos que $\mathbb{K}$ é um *corpo ordenado.*

Exemplo de corpo ordenado: $\mathbb{Q}$ (o conjunto dos números racionais).

A nomenclatura **anel comutativo e com unidade** se refere a um conjunto que satisfaz as 8 propriedades que vimos em aula. Quando não temos a $8^{\underline{a}}$ propriedade, ou seja, quando não existe o elemento neutro da multiplicação, dizemos apenas que é um **anel comutativo**. A unidade se refere ao 1_A, elemento neutro da multiplicação. (tente pensar num exemplo de anel que não tenha unidade). Quando dizemos que A é simplesmente um **anel**, a multiplicação não é necessariamente comutativa e pode não existir o neutro. (Tente pensar num exemplo não-comutativo e com unidade e um caso onde seja não-comutativo e sem unidade). A partir de agora quando mencionarmos um **domínio**, estamos nos referindo a um anel comutativo com unidade que é um domínio de integridade.

Seja A um domínio ordenado.

Definição 2. *Dizemos que $a \geq b$ (a maior ou igual a b) quando existir $p \in P \cup \{0\}$ tal que $b = a + p$.*

Quando $p \in P$ escremos $a > b$ (a maior que b).

Também escreveremos $b \leq a$ (b menor ou igual a a) para indicar que $a \geq b$, e escrevemos $b < a$ (b menor que a) para indicar $a > b$.

No que a partir desta definição segue que $x > 0$ se, e somente se, $x \in P$. De fato, se $x > 0$ então existe $p \in P$ tal que $x = 0 + p = p$, ou seja, $x = p \in P$. Por outro lado, se $x \in P$ então $x = 0 + x$ com $x \in P$ e, por definição, $x > 0$. Não é difícil de mostrar que $x < 0$ (dizemos que x é negativo) se, e somente se, $x = -p$ para algum $p \in P$, tente mostrar isso.

Exercício 4. Seja A um domínio ordenado. Mostre que para quaisquer x e y em A temos que:

$$-(x.y) = (-x).y = x.(-y).$$

Exercício 5. (Tricotomia) Seja A um domínio ordenado.

Mostre que a relação $x \geq y$ (x maior ou igual a y) é uma relação de ordem. Depois mostre que a ordem é total, ou seja, para quaisquer x e y vale $x \geq y$ ou $y \geq x$.

Dica: Para provar que a ordem é total use o fato que $A = -P \cup \{0\} \cup P$ e dos comentários acima sabemos que $x - y > 0$ ou $x - y = 0$ ou $x - y < 0$.

Exercício 6. Seja A um domínio ordenado. Sejam x, y e z elementos de A, mostre que:

a) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.

b) $x < y$ e $z > 0 \Rightarrow xz < yz$.

b) $x < y$ e $z < 0 \Rightarrow xz > yz$.

Exercício 7. Função Módulo ou valor absoluto
Seja A um domínio ordenado, a função módulo é definida por:

$$| x |= \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Sejam x, y elementos de A. Mostre as seguintes propriedades da função módulo $| x |$:

a) $| x |= 0 \Leftrightarrow x = 0$
b) $| x.y |=| x | . | y |$
c) $- | x |\leq x \leq| x |$
d) $| x |\leq \epsilon$ se e somente se $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$
e) $| x + y |\leq| x | + | y |$. (desigualdade triangular)

Exercício 8. Mostre que num domínio ordenado se x é um elemento não-nulo do domínio então $x^2 > 0$.

Observação: Todos os fatos e exercícios acima referentes a domínios ordenados valem em corpos ordenaos (já que corpos são domínios). Esse exercício nos mostra que o corpo dos complexos não pode ser ordenado já que $i \neq 0$ e $i^2 = -1 < 0$.

Exercício 9. Use o Teorema Fundamental da Aritmética para mostrar que um número inteiro a é par se, e somente se, a^2 é par.

Obs: Um número inteiro a é dito par quando $a = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 10. Se $x = \sqrt{2}$ então x é um número real positivo que satisfazendo $x^2 = 2$. Mostre que $x = \sqrt{2}$ não pode ser um número racional. Os números reais que não são racionais chamaremos de números *Irracionais*.

Dica: Suponha por absurdo que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ com a e b primos entre si, lembrando que dois inteiros são primos entre si quando os únicos números que dividem ambos quando são 1 e -1.

Comentário: $\sqrt{2}$ foi só um exemplo, é possível mostrar (examine sua própria demonstração) que $x = \sqrt{p}$ é sempre irracional quando p é primo.

Exercício 11.

Seja $a \in \mathbb{Q}$ um número racional não nulo e $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Mostre que $a.x$ e $a+x$ são irracionais. Dê exemplo de dois números irracionais x, y tais que $x+y$ é racional e $x.y$ irracional e, de dois irracionais x, y tais que $x.y$ é racional e $x+y$ é irracional. Mostre ainda um caso onde x, y são irracionais e ambos, $x+y$ e $x.y$ sejam racionais.

A questão acima pode ser resolvida usando irracionais do tipo raiz de um número primo, porém, decidir se dados dois irracionais o produto ou a soma é um número racional é uma tarefa que pode ser muito complicada, veja exercício sobre o número de Euler e o Pi depois da definição de número algébrico.

Exercício 12.

Mostre que o conjunto $K_{\sqrt{2}} = \{a + b\sqrt{2}; a \in \mathbb{Q} \text{ e } b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ forma um corpo quando munido das operações induzidas do conjunto dos reais.

Dica: Basta conferir que este conjunto satisfaz todas as condições para um conjunto ser chamado de corpo.

Neste caso dizemos que $K_{\sqrt{2}}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

Exercício 13.

Sejam K e L corpos. Uma função $f : K \to L$ chama-se *homomorfismo* quando satisfaz:

$(i) f(x+y) = f(x) + f(y)$;

$(ii) f(x.y) = f(x).f(y)$, para quaisquer x, y em K.

Mostre que:

(a) Para qualquer homomorfismo temos que $f(0_K) = 0_L$.

(b) Prove que se $f : K \to L$ é um homomorfismo então ou $f(x) = 0_L$ para todo $x \in K$, ou então $f(1_K) = 1_L$ e f é injetivo.

Definição 3. *Um número real α é dito* `algébrico` *quando existe um polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros tal que α é raiz de $p(x)$, em outras palavras, $p(x)$ é da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ com $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $0 \leq i \leq n$ e $p(\alpha) = 0$. Quando um número real não é algébrico ele é chamado de* `trascendente`.

Comentário: Note que na definição acima poderíamos ter usado coeficientes racionais ao invés de inteiros. De fato, se α é raiz do polinômio $p(x) = \frac{a_n}{b_n}x^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}x^{n-1} + ... + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0}$ onde $a_i \in \mathbb{Z}, b_i \in \mathbb{Z}^*$ para todo $0 \leq i \leq n$, podemos multiplicar o polinômio por $b_n.b_{n-1}...b_1.b_0$ e assim obtemos um polinômio com coeficientes inteiros que tem α como raiz. Resumindo em palavras: todo número real que é raiz de um polinômio com coeficientes racionais é também raiz de um polinômio de coeficientes inteiros.

Exercício 14. (1 ponto) Mostre que o conjunto dos números reais algébricos é enumerável.

Dica: Use que um polinômio de grau n com coeficientes inteiros de `grau n` (maior expoente que aparece na variável x) tem no máximo n raízes reais diferentes, isso acontece quando os coeficientes pertencem a um corpo (veja qualquer livro de álgebra), e é falso nos Quatérnios. Depois, usando que o produto cartesiano finito de enumeráveis é enumerável, mostre que os números algébricos que são raízes de um polinômio de grau n fixo, são enumeráveis. Conclua a prova usando o fato de que união enumerável de enumeráveis é enumerável. O exercício já está quase resolvido, o que será avaliado é se você consegue escrevê-lo rigorosamente.

Exercício 15.
Mostre que se um número real $\alpha \neq 0$ é algébrico então $-\alpha$ e α^{-1} são algébricos.

Exercício 16.
Mostre que se α e β são números reais algébricos então $\alpha + \beta$ e $\alpha.\beta$ também são algébricos. Usando os resultados do exercício anterior e deste, mostre que o conjunto dos números algébricos formam um corpo.

No futuro veremos que o número de Euler $\mathbf{e}$ e o número π são irracionais. É possível mostrar também que eles são transcendentes (não tocaremos neste ponto aqui), porém, talvez cause surpresa o fato de que não se sabe ainda nos dias de hoje se $\mathbf{e}.\pi$ e $\mathbf{e} + \pi$ são irracionais e, por conseguinte, não sabemos também se são algébricos.

Apesar disso é possível mostrar através de um argumento extremamente elegante que pelo menos um destes números é irracional. Faça você mesmo:

Exercício 17.
Mostre que pelo menos um dos números $\mathbf{e}.\pi$ e $\mathbf{e} + \pi$ é irracional.

Dica: Argumente por absurdo.
Considere o polinômio $p(x) = x^2 - (\mathbf{e}+\pi).x + \mathbf{e}.\pi$ e use o fato que ambos os números $\mathbf{e}$ e π são transcendentes.