MAP0216 - Introdução à Análise Real / MAT0206 - Análise Real

Semestre: 2012-2 - Prof. Rodrigo Bissacot - IME USP

Listas de exercícios e informações sobre o curso em:
https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/anlise-2012

Lista 3:

- Conjuntos finitos e infinitos.

- Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis.

- Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein

- DATA DA ENTREGA: 28.08.2012 - Terça
(Vamos tentar voltar a data de entrega de listas para às sextas).

Observação importante: Caso seja preciso usar resultados intermediários que não foram trabalhados no curso você precisa provar tais afirmações a menos que seja dito que podem ser usados resultados externos ao curso como será feito abaixo no caso do Teorema Fundamental da Aritmética. A mesma regra valerá nas provas e é usando este critério que o monitor corrigirá a lista.

Definição 1. *Seja X um conjunto. Dizemos que X é* `finito` *quando $X = \emptyset$ ou quando existe um natural m e uma função injetora de $f : X \to I_m$ onde $I_n = \{1, 2, ..., m\}$. Caso contrário dizemos que X é* `infinito`.

Definição 2. *Seja X um conjunto finito. Se X é* `finito` *e não vazio então existe um natural m e uma função injetora de $f : X \to I_m$ onde $I_n = \{1, 2, ..., m\}$. Se n é o menor natural verificando esta propriedade (que existe pelo princípio da boa ordenação), dizemos que X tem n elementos. Neste caso n é dito o* `número de elementos de` *X. Quando $X = \emptyset$ dizemos que X tem zero elementos.*

Quando X tem n elementos também diremos que X tem `Cardinalidade n` e usamos a notação $\#X = n$.

Aqui $\#X$ denota a cardinalidade de X.

Cardinalidade de conjuntos (finitos e infinitos):

Não vamos definir `o que é` a cardinalidade de um conjunto X arbitrário. Vamos nos restrigiar apenas a compará-las colocando que $\#X \leq \#Y$ (cardinalidade de X é menor ou igual a cardinalidade de Y quando existir uma função injetora de X em Y. Quando $\#X \leq \#Y$ e não existir nenhuma função sobrejetora de X em Y diremos que a cardinalidade de X é menor que cardinalidade de Y, denotando com o símbolo $\#X < \#Y$.

Diremos que dois conjuntos X e Y tem a mesma cardinalidade quando existir uma bijeção entre os conjuntos, denotando o fato por $\#X = \#Y$.

Note que o Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein que foi provado em aula nos diz que se $\#X \leq \#Y$ e $\#Y \leq \#X$ então $\#X = \#Y$.

Exercício 1. Se X é finito e tem n elementos então existe uma bijeção $f : X \to I_n$ e não existe nenhuma bijeção de X com algum subconjunto próprio deste.

Em particular este exercício nos diz que se X é um conjunto tal que existe um subconjunto $Y \subset X$ que é diferente de X e uma bijeção entre X e Y, então, necessariamente, X é infinito.

Exercício 2. Seja X um conjunto. Mostre que X é infinito se, e somente se, existem $Y \subset X$ tal que $Y \neq X$ e uma bijeção entre X e Y.

Dica: Uma das implicações já foi provada no exercício anterior.

Exercício 3. Seja X um conjunto infinito. Mostre que existe $Y \subset X$ enumerável infinito tal que $Y \neq X$ e $\#(X - Y) = \#X$.

Exercício 4. Sejam X e Y conjuntos finitos mostre que:

$$\#(X \cup Y) + \#(X \cap Y) = \#X + \#Y.$$

Exercício 5. Sejam X e Y conjuntos. Mostre que se $\#X = \#Y$ então $\#\mathcal{P}(X) = \#\mathcal{P}(Y)$.

Definição 3. *Seja X um conjunto. Dizemos que X é* `enumerável` *quando $X = \emptyset$ ou quando existe uma função injetora de $f : X \to \mathbb{N}$.*

A ideia é que podemos "mergulhar"o conjunto dentro dos naturais preservando o seu "tamanho".

Observe que através desta definição temos de imediato que qualquer subconjunto de um conjunto enumerável é também enumerável. De fato, se $Y \subseteq X$ e sabemos que X é enumerável, então existe a função injetora da definição acima e basta tomar a restrição de f ao conjunto Y. Como restrição de função injetora é também injetora Y é enumerável.

Definição alternativa: Como vimos em aula, uma função $f : X \to \mathbb{N}$ é injetora se, e somente se, f possui uma inversa à esquerda $g : \mathbb{N} \to X$ tal que $g \circ f = I_X$. Por outro lado, se temos que $g \circ f = I_X$ então f é uma inversa a direita de para a função g, donde temos que $g : \mathbb{N} \to X$ é sobrejetora pois já provamos que uma função é sobrejetora se, e somente se, possui uma inversa à direita.

Assim, nossa `definição de conjunto enumerável` poderia ter sido assim: X é enumerável quando $X = \emptyset$ ou quando existe uma função sobrejetora $g : \mathbb{N} \to X$.

Exercício 6. Mostre que o conjunto B das sequências de números em $\mathbb{N}$ que são crescentes é não enumerável. Em outras palavras, $x = (n_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B$ se, e somente se, $n_1 < n_2 < n_3 < ...$, ou seja, $n_i < n_j$ quando $i < j$.

Exemplo: $x = (3, 6, 9, 12, ...)$ (sequência onde $n_i = 3.i$ para todo $i \in \mathbb{N}$).

Dica: Use a diagonal de Cantor.

Exercício 7. Seja $\Sigma = \{x = (n_i)_{i\in\mathbb{N}} : n_i \in \mathbb{N}\}$ o conjunto das sequências de números naturais. Diga se os seguintes subconjuntos de Σ são enumeráveis ou não: (provando sua afirmação)

(a) O conjunto A das sequências em Σ quase-constantes, ou seja, que são constantes a partir de um certo índice i. Exemplos de elementos de A:

$x = (2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ...)$ (sequência onde $n_i = 4$ para todo $i \geq 3$)
$y = (1, 0, 987, 35, 7, 7, ...)$ (sequência onde $n_i = 7$ para todo $i \geq 5$)

(b) O conjunto B das sequências em Σ que são não-crescentes. Em outras palavras, $x = (n_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B$ se, e somente se, $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq ...$, ou seja, $n_i \geq n_j$ quando $i < j$.

Exercício 8. Um conjunto X é infinito e enumerável se, e somente se, existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Exercício 9. Um conjunto X é infinito e enumerável. Mostre que o cojunto das partes finitas de X é enumerável, ou seja, mostre que o conjunto $\{A \subset X : A \text{ é finito}\}$ é enumerável.

Exercício 10. Mostre, de duas maneiras diferentes, que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ é enumerável.

(a) Primeiro prove usando o

Teorema 1. *(Teorema Fundamental da Aritmética):*
Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$. Então existem $p_1, p_2, ..., p_k$ primos distintos e $s_1, s_2, ..., s_k$ naturais tais que $n = p_1^{s_1}.p_2^{s_2}....p_k^{s_k}$. Tal fatoração é única a menos da ordem no produto.

Prova: Qualquer livro de Álgebra básica ou introdutório sobre teoria dos números.

(b) Faça agora uma demonstração mostrando que a função definida por:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \quad f(m,n) = \frac{(m+n).(m+n+1)}{2} + m$$

é uma bijeção. Tente dar uma interpretação geométrica para esta função.

Exercício 11. Mostre que os seguintes conjuntos são enumeráveis:

(a) $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$(Inteiros)

(b)(Racionais)

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ quando $ad = bc\}$

Exercício 12.
Mostre que $\#\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \#\mathbb{R}$. Lembre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ denota o conjunto de sequências de números reais.

O que acontece se trocarmos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{N}$?
Ou seja, é verdade que $\#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \#\mathbb{N}$?