

MAP0216 - Introdução à Análise Real / MAT0206 - Análise Real

Semestre: 2012-2 - Prof. Rodrigo Bissacot - IME USP

Listas de exercícios e informações sobre o curso em:
<https://sites.google.com/site/matbissacot/Home/teaching/anlise-2012>

Lista 2:

- Axiomas de Peano.
- Indução e Princípio da boa ordenação.
- Propriedades da soma e multiplicação de números naturais.
- Algoritmo da divisão.

- DATA DA ENTREGA: 21.08.2011 - Terça

(Em função da lista estar sendo entregue atrasada, a ideia é que cada sexta seja entregue a próxima lista).

Observação importante: Caso seja preciso usar resultados intermediários que não foram trabalhados no curso você precisa provar tais afirmações a menos que seja dito que podem ser usados resultados externos ao curso como será feito abaixo no caso do Teorema Fundamental da Aritmética. A mesma regra valerá nas provas e é usando este critério que o monitor corrigirá a lista.

Os axiomas de Peano:

P_1 . A função sucessor $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.

P_2 . $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ é um conjunto unitário cujo elemento chamaremos de 1.

P_3 . (*Princípio da Indução*) Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

(i) $1 \in X$

(ii) Se $n \in X$, então $s(n) \in X$.

Então $X = \mathbb{N}$.

Adição de naturais

Dado um $m \in \mathbb{N}$ arbitrário definimos a soma $m + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

(i) $m + 1 = s(m)$

(ii) $m + s(n) = s(m + n)$, ou seja, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Já provamos em aula que a soma está bem definida para quaisquer m e n naturais.

Propriedades da soma:

1. (Associatividade) Para quaisquer n, m e p naturais temos que:
(*provado em sala de aula*)

$$(m + n) + p = m + (n + p).$$

2. (Comutatividade) Para quaisquer m e n naturais temos que:

$$m + n = n + m$$

Prova: Primeiro provaremos que para qualquer natural m temos que $m + 1 = 1 + m$. A prova é por indução em m .

Base de indução: Se $m = 1$ então pela definição de soma temos que $m + 1 = 1 + 1 = s(1) = 1 + 1 = 1 + m$.

Passo indutivo: Suponha que $m + 1 = 1 + m$, precisamos provar que $s(m) + 1 = 1 + s(m)$, ou seja, $(m + 1) + 1 = 1 + (m + 1)$. Assim:

$$s(m) + 1 = (m + 1) + 1 \stackrel{\text{hipotese}}{=} (1 + m) + 1 \stackrel{\text{associat}}{=} 1 + (m + 1) = 1 + s(m).$$

Provamos assim que para todo m natural $m + 1 = 1 + m$.

Agora provaremos que dado um m natural (arbitrário), temos que $m + n = n + m$ para qualquer n natural.

A prova será por indução em n .

Primeiramente note que a base de indução já está garantida pois já provamos que $m + 1 = 1 + m$.

Passo indutivo: Suponhamos que $m + n = n + m$, então:

$$m + s(n) = m + (n + 1) \stackrel{\text{associa}}{=} (m + n) + 1 \stackrel{\text{hipotese}}{=} (n + m) + 1 \stackrel{\text{associa}}{=}$$

$$n + (m + 1) \stackrel{\text{base}}{=} n + (1 + m) \stackrel{\text{associa}}{=} (n + 1) + m = s(n) + m.$$

Pelo princípio da indução provamos que $m + n = n + m$ para qualquer n natural. Como o m é arbitrário, acabamos de provar que para quaisquer

m e n naturais temos que $m + n = n + m$. $\square$

Exercício 1.

Prove as seguintes afirmações:

(a) (Lei do cancelamento) Sejam m, n e p números naturais, então:

$$m + n = m + p \Rightarrow n = p.$$

(b) (Tricotomia)

Dados m e n naturais vale uma e, somente uma, das três afirmações:

(i) $m = n$

(ii) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$.

(iii) Existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$.

Comentário: Disso segue que $\mathbb{N}$ é um conjunto *bem ordenado* (totalmente ordenado) com a relação de ordem dada por: a está relacionado com b quando $a \geq b$.

Definição 1. Dizemos que n é menor que m , denotando por $n < m$ quando vale (b), ou seja, quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Neste caso também dizemos que m é maior que n , onde escrevemos $m > n$.

Definição 2. Dado um conjunto X , chamamos de ordem parcial uma relação $\preceq$ em $X \times X$ que satisfaz:

(i) $x \preceq x$ para todo $x \in X$. (reflexiva)

(ii) Se $x \preceq y$ e $y \preceq x$ então $x = y$. (anti-simétrica)

(iii) Se $x \preceq y$ e $y \preceq z$ então $x \preceq z$. (transitiva)

Um par $(X, \preceq)$ onde $\preceq$ é uma ordem parcial é dito um *conjunto parcialmente ordenado*.

Quando para quaisquer x e y temos que $x \preceq y$ ou $y \preceq x$ e, valem (i), (ii) e (iii), então a relação é chamada a *ordem* ou *ordem total*. Neste caso $(X, \preceq)$ é dito um *conjunto ordenado* ou *totalmente ordenado*.

Definição 3. Seja $(X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado.

Dado $A \subset X$, dizemos que $x \in X$ é uma *cota inferior* para A quando $x \preceq a$ para todo $a \in A$.

Definição 4. Seja $(X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado.

Dado $A \subset X$, dizemos que $b \in A$ é o *menor elemento* de A ou *elemento mínimo* quando $b \preceq a$ para todo $a \in A$.

Observações:

1. Todo mínimo é cota inferior mas nem toda cota inferior é mínimo do conjunto, o mínimo, por definição, deve pertencer ao conjunto.

2. Definindo em $\mathbb{N}$ a relação $\leq$ **menor** ou **igual** por:

$m \leq n$ quando $m < n$ ou $m = n$.

Temos que $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto ordenado.

Proposição: (*Princípio da boa ordenação*).

Todo conjunto subconjunto não-vazio $X \subseteq \mathbb{N}$ possui um menor elemento. (provado em aula)

Exercício 2. (Transitividade da relação "menor que" ($<$))

Sejam m, n e p naturais. Mostre que:

$$(m < n \text{ e } n < p) \Rightarrow m < p$$

Exercício 3. Sejam m, n e p naturais. Mostre que:

$$m + p < n + p \Leftrightarrow m < n.$$

Exercício 4. Sejam m, n e p naturais. Mostre que:

$$(m < n \text{ e } n \leq p) \Rightarrow m < p.$$

Comentário: Na maioria das vezes quando valerem simultaneamente $m < n$ e $n \leq p$ escreveremos $m < n \leq p$.

Multiplicação em $\mathbb{N}$

Dados m e n arbitrários em $\mathbb{N}$ definimos o produto $m.n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

(i) $m.1 = m$

(ii) $m.s(n) = m.n + m$, ou seja, $m.(n + 1) = m.n + m$.

Exercício 5.

Prove as seguintes propriedades da multiplicação em $\mathbb{N}$.

(a) Mostre que a multiplicação está bem definida para quaisquer m e n naturais através de (i) e (ii).

(b) (Associatividade)

Mostre que para quaisquer n, m e p naturais temos $(m.n).p = m.(n.p)$.

(c) (Comutatividade)

Mostre que para quaisquer m e n naturais vale $m.n = n.m$.

(d) (Cancelamento)

Mostre que para quaisquer n, m e p naturais temos que:

(d_1)($m.p = n.p \Rightarrow m = n$).

(d_2)(Distributividade) $m.(n + p) = m.n + m.p$.

(d_3)(Monotonicidade) $m < n \Rightarrow m.p < n.p$.

Comentário: Note que pela definição da multiplicação (item i) e comutatividade temos a existência do elemento neutro para a multiplicação, ou seja,

$$m.1 = 1.m = m$$

para qualquer m natural.

Incluindo o zero nos naturais

Uma outra alternativa ao considerarmos os axiomas de Peano e as definições de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ é começarmos do elemento que chamaremos de zero e não do 1. A construção é análoga ao que fizemos até aqui com as devidas modificações na definição da adição e multiplicação que já são esperadas. A menos que se diga o contrário, estamos sempre pensando que os naturais começam a partir do 1, mas as definições a seguir nos autorizam sempre que necessário utilizarmos os Naturais a partir do zero.

Axiomas de Peano (Naturais a partir do zero)

1. A função sucessor $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.
2. $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ é um conjunto unitário cujo elemento chamaremos de 0.
3. (*Princípio da Indução*) Seja $X \subset \mathbb{N}$ tal que:
 - (i) $0 \in X$
 - (ii) Se $n \in X$, então $s(n) \in X$.Então $X = \mathbb{N}$.

Soma de naturais

Dado um $m \in \mathbb{N}$ arbitrário definimos a soma $m + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

- (i) $m + 0 = m$
- (ii) $m + s(n) = s(m + n)$, ou seja, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Agora 1 é a notação usada para $s(0)$.

Multiplicação em $\mathbb{N}$

Dado um $m \in \mathbb{N}$ arbitrário definimos o produto $m.n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

- (i) $m.0 = 0$
- (ii) $m.s(n) = m.n + m$, ou seja, $m.(n + 1) = m.n + m$.

As propriedades já provadas seguem valendo e algumas sofrem pequenas modificações, note que aqui também já saímos com um elemento neutro para a soma que é o zero.

Exercício 6.

Discuta se valem ou não as propriedades do cancelamento e da monotonicidade da multiplicação quando consideramos os naturais incluindo o zero.

Indução a partir de um natural qualquer

Exercício 7. Prove o seguinte resultado que é muito útil para quando queremos provar que alguma propriedade é válida a partir de algum natural não necessariamente 0 ou 1. Aqui $\mathbb{N}$ contém o zero.

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que

(i) $a \in X$

(ii) $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$.

Mostre que $\{a, a + 1, a + 2, \dots\} = \{a + m; m \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

Dica: Indução em m .

Comentário: O exercício acima nos dá uma nova maneira de provar que determinadas propriedades valem de um número natural a em diante. Para verificar que uma determinada propriedade P é satisfeita para todo natural $n \geq a$ basta provarmos que:

(i) $P(a)$ é verdadeira. (base de indução)

(ii) Se $P(n)$ é verdadeira para algum $n \geq a$ então $P(n + 1)$ é verdadeira.
(Passo indutivo)

Observe que apenas trocamos a afirmação $n \in X$ por $P(n)$ é verdadeira, o que dá no mesmo se $X = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira}\}$.

Potência: Dado $a \in \mathbb{N}$ seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

1. $f(1) = a$

2. $f(n + 1) = a \cdot f(n)$.

Não é difícil mostrar que f está bem definida para todo n natural.

(f foi definida recursivamente)

Notação: $f(n) = a^n$.

Exercício 8.

Sejam a e b naturais, prove que para quaisquer m e n naturais temos que:

(a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(b) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

(c) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exercício 9. Mostre que para todo $n \geq 4$ natural temos que:

(a) $2^n < n!$. (Antes de fazer a prova defina recursivamente a função $n!$).

(b) $2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$.

Teorema 1. (Princípio da Indução 2º forma - Indução completa)

Seja $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que

(i)' $1 \in X$

(ii)' Se para todo k tal que $1 \leq k < n$ temos que $k \in X$ então $n \in X$.

Então $X = \mathbb{N}$.

Comentário: Da mesma forma que provamos que provamos no exercício 6 este segundo princípio de indução também pode ser enunciado e provado a partir de um $a \in \mathbb{N}$ no lugar do número 1. Este princípio é útil quando precisamos de informação de outros termos anteriores ao $n + 1$ além do n para poder concluir o passo indutivo.

Exercício 10.(Divisão Euclideana)

Dados $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $d \in \mathbb{N}$ mostre que existem naturais q e r tais que:

$$n = d.q + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < d$$

Mostre também que fixados n e d , q e r são únicos.

Dica: Use indução completa em n .