Lista 6

(1) Seja K um corpo ordenado e sejam a e b elementos de K. Mostre que se $a \neq b$ então $\left(0 < \varepsilon \leqslant \frac{|a-b|}{2}\right) \Rightarrow \left(B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b) = \emptyset\right)$

Suponha que $B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b) \neq \emptyset$. Então tome $x \in B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b)$ e obtemos que $|x-a| < \varepsilon$ e $|x-b| < \varepsilon$. Portanto, $|a-b| = |a-x+x-b| \leqslant |a-x| + |x-b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \leqslant |a-b|$. Absurdo!

$\therefore B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b) = \emptyset$

(2) Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tq. para todo $n > n_0$ vale $|X_n - a| < \varepsilon$

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tq. para todo $n > n_0$ vale $|X_n - a| \leqslant \varepsilon$

(c) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tq. para todo $n \geqslant n_0$ vale $|X_n - a| \leqslant \varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tq. para todo $n \geqslant n_0$ vale $|X_n - a| < \varepsilon$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tq $n > m_0$ implica $|X_n - a| < \varepsilon$.
Sendo assim, tome $n_0 = n_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon)$ e obtemos: $n > n_0 \Rightarrow n > m_0 \Rightarrow |X_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |X_n - a| \leqslant \varepsilon$ ∎

(b) $\Rightarrow$ (c) Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n > m_0$ implica $|X_n - a| \leqslant \varepsilon$
Sendo assim, tome $n_0 = n_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon) + 1 = m_0 + 1$ e obtemos:
$n \geqslant n_0 \Rightarrow n > m_0 \Rightarrow |X_n - a| \leqslant \varepsilon$ ∎

(c) $\Rightarrow$ (d) Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese $\exists m_0 = m_0(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ tq. $n \geqslant m_0$ implica $|X_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Sendo assim, tome $n_0 = n_0(\varepsilon) = m_0(\frac{\varepsilon}{2}) = m_0$ e obtemos:
$n \geqslant n_0 \Rightarrow n \geqslant m_0 \Rightarrow |X_n - a| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow |X_n - a| < \varepsilon$ ∎

(d) $\Rightarrow$ (a) Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese $\exists m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq. $n \geqslant m_0$ implica $|X_n - a| < \varepsilon$
Sendo assim, tome $n_0 = n_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon) = m_0$ e obtemos:
$n > n_0 \Rightarrow n > m_0 \Rightarrow n \geqslant m_0 \Rightarrow |X_n - a| < \varepsilon$ ∎

(3) Seja $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tq. para todo $n > n_0$ vale $|X_n - a| < \varepsilon$.

(ii) Fixado $\alpha > 0$, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ tq. para todo $n > n_0$ vale $|X_n - a| < \alpha \cdot \varepsilon$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese $\exists\, m_0 = m_0(\alpha\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq. $n > m_0$ implica $|X_n - a| < \alpha\cdot\varepsilon$.
Sendo assim, tome $n_0 = n_0(\varepsilon) = m_0(\alpha\cdot\varepsilon) = m_0$ e obtemos:
$n > n_0 \Rightarrow n > m_0 \Rightarrow |X_n - a| < \alpha\varepsilon$ ∎
(ii) $\Rightarrow$ (i) Dado $\varepsilon > 0$, tome $\alpha = 1$ e, por hipótese, $\exists\, m_0 = m_0(\varepsilon)$ tq. $n > m_0$ implica $|X_n - a| < \alpha\cdot\varepsilon = 1\cdot\varepsilon$.
Sendo assim, tome $n_0 = n_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon) = m_0$ e obtemos:
$n > n_0 \Rightarrow n > m_0 \Rightarrow |X_n - a| < 1\cdot\varepsilon \Rightarrow |X_n - a| < \varepsilon$ ∎

4) Sejam $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais. Mostre que se $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada então $\lim\limits_{n\to\infty} X_n\cdot y_n = 0$.

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada $\Rightarrow \exists\, M > 0$ tq. $|y_n| < M\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq. $n > m_0 \Rightarrow |X_n - 0| = |X_n| < \varepsilon$

Então, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 = n_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon) = m_0$ e obtemos:
$n > n_0 \Rightarrow n > m_0 \Rightarrow |X_n\cdot Y_n - 0| = |X_n\cdot Y_n| = |X_n|\cdot|Y_n| < \varepsilon\cdot M$
Logo, usando o ex. 3, chegamos que $\lim\limits_{n\to\infty} X_n\cdot Y_n = 0$ ∎

5) Mostre que se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de números reais definida por $X_n = \frac{n!}{n^n}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$

$$X_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\left(\prod_{j=2}^{n} j/n\right)$$

Então, definindo $y_n = \frac{1}{n}$ e $Z_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ \prod_{j=2}^{n} \frac{j}{n}, & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$, temos que $X_n = y_n \cdot Z_n, \forall n \in \mathbb{N}$

e, além disso, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ ($\mathbb{R}$ é arquimediano) e Z_n é limitada, pois $|Z_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, usando o ex. 4, obtemos que $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$ ∎

6) Mostre que se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de números reais não-decrescente ($X_n \leq X_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$) e limitada superiormente, então $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a = \sup\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Seja $A = \{X_n ; n \in \mathbb{N}\}$ e $a = \sup A$. Então, $\forall \varepsilon > 0, \exists y = y(\varepsilon) \in A$ com $y > a - \varepsilon$. Mas $\exists m = m(\varepsilon)$ tq. $y = X_m$, logo, $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ com $X_m > a - \varepsilon$.

Então, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 = n_0(\varepsilon) = m(\varepsilon) = m$ e obtemos que:

$$n > n_0 \Rightarrow n > m_0 \underset{(X_n) \text{ é não-decrescente}}{\Rightarrow} X_n \geq X_{m_0} > a - \varepsilon \Rightarrow |X_n - a| \underset{a \geq X_n, \forall n \in \mathbb{N}}{=} a - X_n < \varepsilon.$$

$\therefore \lim_{n \to \infty} X_n = a$ ∎

(7) Mostre que se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência de números reais não-crescente ($X_n \geq X_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$) e limitada inferiormente, então $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{n \to \infty} X_n = a = \inf \{X_n ; n \in \mathbb{N}\}$

Completamente análogo ao anterior.

(8) (Teorema do Sanduíche) Sejam $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$; $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências de números reais tais que:

(i) $X_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$; (ii) $\lim x_n = X$ e $\lim z_n = Z$.

(a) Mostre que $X \leq Z$

Suponha $X > Z$. Então, $Z < \frac{X+Z}{2} < X$ e por (ii), temos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ e $m_0 \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq n_0$ implica $X_n > \frac{X+Z}{2}$ e $n \geq m_0$ implica $z_n < \frac{X+Z}{2}$. Logo, tomando

$n_1 = \max\{n_0, m_0\}$, temos que $z_{n_1} < \frac{X+Z}{2} < X_{n_1}$. Absurdo por (i)! $\therefore X \leq Z$ ∎

(b) Mostre que se $X = Z$ então $\lim y_n = \lim X_n = \lim z_n = X = Z$.

Como $\lim x_n = X = \lim z_n$, temos que $\forall \varepsilon > 0$, existem naturais $n_1 = n_1(\varepsilon)$ e $n_2 = n_2(\varepsilon)$, tais que $n > n_1$ implica $X_n > X - \varepsilon$ e $n > n_2$ implica $z_n < X + \varepsilon$. Logo, tomando $n_0 = n_0(\varepsilon) = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $n > n_0 \Rightarrow X - \varepsilon < X_n \leq y_n \leq z_n < X + \varepsilon$, donde $n > n_0 \Rightarrow y_n \in]X - \varepsilon, X + \varepsilon[$ e daí $|y_n - X| < \varepsilon$ e, portanto, $\lim y_n = X$

(9) Seja $a \in \mathbb{R}$ e $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente de números reais tal que $\lim X_n = a > 0$. Mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_n > 0$ para todo $n \geq n_0$. Enuncie e demonstre o resultado quando $a < 0$.

Tome $\varepsilon = a$. Então $\varepsilon > 0$, logo $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq n_0 \Rightarrow |X_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[=]a-a, a+a[=]0,2a[\Rightarrow x_n > 0$ ∎

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais convergente com $\lim x_n = a < 0$. Mostre que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq n_0$ implica $x_n < 0$.

Dem: Tome $\varepsilon = -a$. Então $\varepsilon > 0$, logo $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow x_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[=]a+a, a-a[=]2a, 0[\Rightarrow x_n < 0$ ∎

(10) Sejam $a > b$ números reais e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente de números reais tal que $\lim x_n = a$. Mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > b$ para todo $n \geq n_0$. Enuncie e prove o resultado análogo quando $a < b$.

Tome $\varepsilon = a - b$. Então $\varepsilon > 0$, logo $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$.
Portanto, $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow x_n \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[=]a-a+b, a+a-b[=]b, 2a-b[\Rightarrow x_n > b$ ∎

Sejam $a < b$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. de reais tq. $\lim x_n = a$. Mostre que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $x_n < b$ para todo $n \geq n_0$.

Dem: Completamente análogo.

(11) (i) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ é uma família de fechados de $\mathbb{R}$, então $\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda$ é fechado.

$\left(\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in I} (A_\lambda^c)$ é aberto, pois A_λ^c é aberto, $\forall \lambda \in I$. Logo, $\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda$ é fechado ∎

(ii) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é fechado.

$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i^c)$ é aberto, pois A_i^c é aberto, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é fechado ∎