Lista 4

① Seja X um conjunto e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Definindo $\bar{x} = \{y \in X : x \sim y\}$ a classe de equivalência do elemento x, mostre que $x \nsim y \iff \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

($\Rightarrow$) Assumindo que x não é equivalente a y, suponha por absurdo que $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$. Então, $\exists\, z \in \bar{x} \cap \bar{y}$, logo $x \sim z$ e $y \sim z$. Pela propriedade simétrica da relação de equivalência $\sim$, temos que $z \sim y$, donde usando que $x \sim z$ e $z \sim y$, vem que $x \sim y$ pela propriedade transitiva de $\sim$. Absurdo! ∎

($\Leftarrow$) Assumindo que $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$, suponha por absurdo que $x \sim y$. Dessa forma teríamos que $y \in \bar{x}$, mas como $y \in \bar{y}$, já que $y \sim y$ pela propriedade reflexiva teríamos que $y \in \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Absurdo! ∎

② Seja X um conjunto e $(X_i)_{i \in I}$ uma coleção de subconjuntos de X que forme uma partição de X, ou seja, a união dos conjuntos é igual ao conjunto X, são todos não-vazios e a coleção é disjunta:
(i) $X_i \neq \emptyset, \forall i \in I$; (ii) $X_i \cap X_j = \emptyset$ se $i \neq j$; (iii) $\bigcup_{i \in I} X_i = X$

Mostre que a relação definida por $x \sim y$ quando existir $i \in I$ tal que $x \in X_i$ e $y \in X_i$ é uma relação de equivalência.

Para mostrarmos que $\sim$ é uma relação de equivalência, vamos demonstrar que $\sim$ satisfaz as seguintes propriedades:
a) (Reflexiva) $x \sim x, \forall x \in X$;
b) (Simétrica) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
c) (Transitiva) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$;

Demonstração:
a) Dado $x \in X$, por (iii) $\exists\, i \in I$ tq. $x \in X_i$, donde $x \sim x$ ∎
b) Sejam $x, y \in X$ tais que $x \sim y$. Então $\exists\, i \in I$ tq. $x \in X_i$ e $y \in X_i$, donde $y \in X_i$ e $x \in X_i$ e, portanto, $y \sim x$ ∎
c) Sejam $x, y, z \in X$ tais que $x \sim y$ e $y \sim z$. Então $\exists\, i, j \in I$ tais que $x \in X_i$, $y \in X_i$, $y \in X_j$ e $z \in X_j$ e como $y \in X_i \cap X_j \neq \emptyset$, vem que $i = j$ e, portanto $z \in X_i$, donde $x \sim z$ ∎

③ (Sistemas Dinâmicos) Seja $f: X \to X$ uma função. A órbita de $x \in X$ é definida por $O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\} = \{f^n(x);\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Mostre que a relação definida por $x \sim y$ quando $O_f(x) \cap O_f(y) \neq \emptyset$ é uma relação de equivalência.

Para mostrarmos que $\sim$ é uma relação de equivalência, vamos demonstrar que $\sim$ satisfaz as seguintes propriedades:

a) (Reflexiva) $x \sim x,\ \forall x \in X$;

b) (Simétrica) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

c) (Transitiva) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Demonstração:

a) Dado $x \in X$, temos que $O_f(x) \neq \emptyset$, donde $x \sim x$ $\blacksquare$

b) Sejam $x, y \in X$ tais que $x \sim y$. Então $O_f(x) \cap O_f(y) = O_f(y) \cap O_f(x) \neq \emptyset$, donde $y \sim x$ $\blacksquare$

c) Sejam $x, y, z \in X$ tais que $x \sim y$ e $y \sim z$. Então $O_f(x) \cap O_f(y) \neq \emptyset \neq O_f(y) \cap O_f(z)$, donde $\exists\, a, b \in X$ tais que $a \in O_f(x) \cap O_f(y)$ e $b \in O_f(y) \cap O_f(z)$ e, portanto, $\exists\, k, l, m, n \in \mathbb{N}_0$ tais que $a = f^k(x) = f^l(y)$ e $b = f^m(y) = f^n(z)$ e as seguintes possibilidades:

- $k = l$. Então, se $m = n = k$, temos $a = f^l(y) = f^m(y) = b$, donde $a = b \in O_f(x) \cap O_f(z)$ $\therefore x \sim z$

Se $m = n < k$, temos que $a = f^k(x) = f^l(y) = f^{l-m}(f^m(y)) = f^{l-m}(f^n(z)) = f^{l-m+n}(z) = f^l(z)$ e, portanto, $a \in O_f(x) \cap O_f(z) \neq \emptyset$ $\therefore x \sim z$ $\blacksquare$

Se $m = n > k$, temos que $b = f^n(z) = f^m(y) = f^{m-l}(f^l(y)) = f^{m-l}(f^k(x)) = f^m(x)$ e, portanto, $b \in O_f(x) \cap O_f(z) \neq \emptyset$ $\therefore x \sim z$ $\blacksquare$

Vamos omitir todos os casos que são muitos, mas em todos eles concluímos que $x \sim z$ $\blacksquare$

④ Seja A um domínio ordenado. Mostre que para quaisquer x e y em A, temos que:

$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$$

- $x \cdot y + (-x) \cdot y \overset{\text{Distributiva}}{=} (x + (-x)) \cdot y = 0_A \cdot y = 0_A$, donde $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ $\blacksquare$

- $x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0_A = 0_A$, donde $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ $\blacksquare$

⑤ (Tricotomia) Seja A um domínio ordenado. Mostre que a relação $X \geq y$ (X maior ou igual a y) é uma relação de ordem. Depois mostre que a ordem é total, ou seja, para quaisquer x e y vale $x \geq y$ ou $y \geq x$.

Para mostrarmos que $\geq$ é uma relação de ordem, vamos demonstrar que $\geq$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) (Reflexiva) $X \geq X, \forall x \in A$;

(b) (Anti-simétrica) $(x \geq y$ e $y \geq x) \Rightarrow x = y$

(c) (Transitiva) $(x \geq y$ e $y \geq z) \Rightarrow x \geq z$

Demonstração:

(a) Dado $x \in A$, temos que $x = x + p$, onde $p = 0 \in P \cup \{0\}$, donde $x \geq x$ ∎

(b) Sejam $x, y \in A$ tais que $x \geq y$ e $y \geq x$. Então $\exists\, q, r \in P \cup \{0\}$ tais que $x = y + q$ e $y = x + r$, donde $x = y + q = x + (r+q)$ e, portanto, $r + q = 0$ e daí $r = -q$. Como $P \cap (-P) = \emptyset$, temos que $r = q = 0$ e, portanto, $x = y$ ∎

(c) Sejam $x, y, z \in A$ tais que $x \geq y$ e $y \geq z$. Então $\exists\, q, r \in P \cup \{0\}$ tais que $x = y + q$ e $y = z + r$, donde $x = y + q = z + (r + q)$ e como $r + q \in P \cup \{0\}$, temos $x \geq z$ ∎

Para mostrar que $\geq$ é uma ordem total, sejam $x, y \in A$ e considere o elemento $r = x + (-y)$. Como $A = -P \cup \{0\} \cup P$ é uma união disjunta, resulta que $r \in -P$, $r = 0$ ou $r \in P$, e como $x = y + r$ temos as seguintes possibilidades:

- $r \in -P \Rightarrow -r \in P \Rightarrow y = x + (-r) \Rightarrow y > x$
- $r = 0 \Rightarrow x = y$
- $r \in P \Rightarrow x = y + r \Rightarrow x > y$

⑥ Seja A um domínio ordenado. Sejam x, y e z elementos de A, mostre que:

a) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

$x < y \Rightarrow \exists\, p \in P$ tq. $y = x + p \Rightarrow \exists\, p \in P$ tq. $(y + z) = (x + z) + p \Rightarrow x + z < y + z$ ∎

b) $x < y$ e $z > 0 \Rightarrow xz < yz$

$(x < y$ e $z > 0) \Rightarrow (\exists\, p \in P$ tq. $y = x + p$ e $z \in P) \Rightarrow y \cdot z = (x + p) \cdot z = x \cdot z + \underbrace{p \cdot z}_{\in P} \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$ ∎

c) $x < y$ e $z < 0 \Rightarrow x \cdot z > yz$

$(x < y$ e $z < 0) \Rightarrow (x < y$ e $-z > 0) \overset{\text{Ítem (b)}}{\Longrightarrow} x \cdot (-z) < y \cdot (-z) \overset{\text{Ex. 4}}{\Longrightarrow} -(x \cdot z) < -(y \cdot z) \overset{\text{Ítem (a)}}{\Longrightarrow}$

$-(x \cdot z) + x \cdot z + y \cdot z < -(y \cdot z) + x \cdot z + y \cdot z \Rightarrow y \cdot z < x \cdot z \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$ ∎

/ /

⑦ (Função módulo ou valor absoluto)

Seja A um domínio ordenado, a função módulo é definida por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Sejam x, y elementos de A. Mostre as seguintes propriedades da função módulo $|x|$.

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

($\Leftarrow$) $x = 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow |x| = 0$ ▪

($\Rightarrow$) $|x| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ se } x \geq 0 \\ \text{ou} \\ -x = 0, \text{ se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$ ▪

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Existem as seguintes possibilidades:

- $x = 0$ (ou $y = 0$)

$|x \cdot y| = |0 \cdot y| = |0| = 0 = 0 \cdot |y| = |x| \cdot |y|$ ▪

- $x > 0$ e $y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

$\therefore |x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$ ▪

- $x > 0$ e $y < 0$ (ou $x < 0$ e $y > 0$) $\Rightarrow x \cdot (-y) > 0 \Rightarrow xy < 0$

$\therefore |x \cdot y| = -x \cdot y = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$ ▪

- $x < 0$ e $y < 0 \Rightarrow (-x) \cdot (-y) > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

$\therefore |x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$ ▪

c) $-|x| \leq x \leq |x|$

- $x \leq |x|$: se $x \geq 0$, $|x| = x$, donde $x \leq |x|$ e se $x < 0$, $|x| = -x > 0 > x$, donde $x < |x|$

$\therefore x \leq |x|$ ▪

- $-|x| \leq x$: se $x \geq 0$, $|x| = x$, donde $-|x| = -x \leq 0 \leq x$ e se $x < 0$, $|x| = -x$, donde $-|x| = -(-x) = x$. $\therefore -|x| \leq x$ ▪

d) $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$

($\Rightarrow$) Se $x \geq 0$, temos que $|x| \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq \varepsilon \Rightarrow 0 \leq x \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq 0 \leq x \leq \varepsilon$ ▪

Se $x < 0$, temos que $|x| \leq \varepsilon \Rightarrow -x \leq \varepsilon \Rightarrow 0 \leq -x \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq x \leq 0 \leq \varepsilon$ ▪

($\Leftarrow$) Se $x \geq 0$, temos que $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \Rightarrow 0 \leq x \leq \varepsilon \Rightarrow 0 \leq |x| \leq \varepsilon \Rightarrow |x| \leq \varepsilon$ ▪

Se $x < 0$, temos que $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon \leq x < 0 \Rightarrow -\varepsilon \leq -|x| \Rightarrow |x| \leq \varepsilon$ ▪

e) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (Desigualdade triangular)

Pelo item (c), sabemos que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$

Somando as 2 expressões, temos que $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$ e pelo item (d) tomando $\varepsilon = |x|+|y|$, obtemos que $|x+y| \leq |x|+|y|$ ∎

8) Mostre que num domínio ordenado se x é um elemento não-nulo do domínio, então $x^2>0$.

Como $x \neq 0$, tem-se que $x \in P$ ou $x \in -P$

Se $x \in P$, temos que $x^2 = x \cdot x \in P$, donde $x^2 > 0$ ∎

Se $x \in -P$, temos que $-x \in P$ e daí $x^2 = x \cdot x = -[-(x\cdot x)] \underset{\text{Ex. 4}}{=} -[x \cdot (-x)] = (-x)\cdot(-x) \in P$, donde $x^2 > 0$ ∎

9) Use o Teorema Fundamental da Aritmética para mostrar que um número inteiro a é par se, e somente se, a^2 é par.

($\Rightarrow$) a é par $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq. $a = 2k \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq. $a^2 = (2k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot (2k^2)$ $\Rightarrow a^2$ é par ∎

($\Leftarrow$) a não é par $\Rightarrow a = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j}$ com $p_j \neq 2, \forall j = \{1, \dots, n\} \Rightarrow a^2 = \prod_{j=1}^{n} p_j^{2\alpha_j}$ sem 2 na sua decomposição (única pelo Teorema) em fatores primos $\Rightarrow a^2$ não é par ∎

10) Se $x = \sqrt{2}$ então x é um número real positivo que satisfaz $x^2 = 2$. Mostre que $x = \sqrt{2}$ não pode ser um número racional.

Suponha, por absurdo, que $\exists\, a, b \neq 0$ primos entre si com $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Então, teríamos que $a^2 = 2b^2$, donde a^2 é par. Pelo ex. 9, obteríamos que a é um número par. Então, $\exists\, k$ tq. $a = 2k$ e, portanto, $a^2 = 2b^2 = 4k^2$, donde $b^2 = 2k^2$ e da mesma forma, obtemos que b^2 é par e, portanto, b é par.

Logo, a e b são números pares e daí não são primos entre si. Absurdo

$\therefore \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ∎

11) Seja $a \in \mathbb{Q}$ um número racional não-nulo e $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Mostre que $a \cdot x$ e $a + x$ são irracionais. Dê exemplos de dois números irracionais x, y tais que $x+y$ é racional e $x \cdot y$ irracional e, de dois irracionais x, y tais que $x \cdot y$ é racional e $x+y$ irracional. Mostre ainda um caso onde x, y são irracionais e ambos, $x+y$ e $x\cdot y$ sejam racionais.

$a\cdot x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$: Suponha $a\cdot x\in\mathbb{Q}$. Então $\exists\, a^{-1}\in\mathbb{Q}$ e $a^{-1}(a\cdot x)=1\cdot x = x\in\mathbb{Q}$. Absurdo! ∎

$a+x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$: Suponha $a+x\in\mathbb{Q}$. Então $\exists\, -a\in\mathbb{Q}$ e $-a+(a+x)=0+x=x\in\mathbb{Q}$. Absurdo! ∎

Exemplo 1: $x=\sqrt[3]{2}$ e $y=-\sqrt[3]{2}$. Daí $x+y=0\in\mathbb{Q}$ e $x\cdot y=-\sqrt[3]{4}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Exemplo 2: $x=\sqrt{2}=y$. Daí $x\cdot y=2\in\mathbb{Q}$ e $x+y=2\cdot\sqrt{2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Exemplo 3: $x=\sqrt{2}$ e $y=-\sqrt{2}$. Daí $x+y=0\in\mathbb{Q}$ e $x\cdot y=-2\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

(12) Mostre que o conjunto $K_{\sqrt{2}}=\{a+b\sqrt{2};\ a\in\mathbb{Q} \text{ e } b\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{R}$ forma um corpo quando munido das operações induzidas do conjunto dos reais.

Para mostrarmos que $K_{\sqrt{2}}$ é um subcorpo, basta mostrarmos que:

(i) $1\in K_{\sqrt{2}}$; (ii) $x,y\in K_{\sqrt{2}} \Rightarrow x+y\in K_{\sqrt{2}}$ e $x\cdot y\in K_{\sqrt{2}}$ (iii) $x\in K_{\sqrt{2}} \Rightarrow -x\in K_{\sqrt{2}}$ e $x^{-1}\in K_{\sqrt{2}}$, se $x\neq 0$.

Demonstração:

(i) $1\in K_{\sqrt{2}}$, com $a=1\in\mathbb{Q}$ e $b=0\in\mathbb{Q}$ ∎

(ii) $x,y\in K_{\sqrt{2}} \Rightarrow \exists\, a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ com $x=a+b\sqrt{2}$ e $y=c+d\sqrt{2}$. Daí:

- $x+y=a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in K_{\sqrt{2}}$, pois $a+c\in\mathbb{Q}$ e $b+d\in\mathbb{Q}$ ∎
- $x\cdot y=(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\cdot\sqrt{2}\in K_{\sqrt{2}}$, pois $ac+2bd\in\mathbb{Q}$ e $ad+bc\in\mathbb{Q}$ ∎

(iii) $x\in K_{\sqrt{2}} \Rightarrow \exists\, a,b\in\mathbb{Q}$ tq. $x=a+b\sqrt{2}$. Daí:

- $-x=-(a+b\sqrt{2})=(-a)+(-b)\sqrt{2}\in K_{\sqrt{2}}$, pois $-a\in\mathbb{Q}$ e $-b\in\mathbb{Q}$
- se $x\neq 0$, $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, donde $x^{-1}=\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\dfrac{a}{a^2-2b^2}+\left(\dfrac{-b}{a^2-2b^2}\right)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

pois $\dfrac{a}{a^2-2b^2}\in\mathbb{Q}$ e $\dfrac{-b}{a^2-2b^2}\in\mathbb{Q}$

Como $K_{\sqrt{2}}$ é fechado para as duas operações, este forma um subcorpo de $\mathbb{R}$.

(13) Sejam K e L corpos. Uma função $f: K\to L$ chama-se homomorfismo quando satisfaz:

(i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$; e (ii) $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$; $\forall x,y\in K$.

Mostre que:

(a) Para qualquer homomorfismo temos que $f(0_K)=0_L$

(b) Prove que se $f: K\to L$ é um homomorfismo então ou $f(x)=0_L$ para todo $x\in K$, ou então $f(1_K)=1_L$ e f é injetivo.

(a) $f(0_K) = f(0_K + 0_K) = f(0_K) + f(0_K) \Rightarrow 0_L = f(0_K)$ ∎

(b) Claro que a função g definida por $g(x) = 0_L$, $\forall x \in K$ é um homomorfismo. Então, mostremos que se $f: K \to L$ é um homomorfismo com $f \neq g$, então $f(1_K) = 1_L$ e f é injetora:

Como $f \neq g$, $\exists\, x \in K$ tq. $f(x) \neq 0_L$. Mas $f(x) = f(1_K \cdot x) = f(1_K) \cdot f(x)$, donde $f(1_K) \cdot f(x) = f(x)$ e como $f(x) \neq 0_L$, vem que $f(1_K) = 1_L$.

Agora, suponha que f não é injetora. Então existiriam elementos $a \neq b$ em K tais que $f(a) = f(b)$, donde $f(a-b) = 0_L$, com $a - b \neq 0_K$ e como já mostramos, teríamos que $1_L = f(1_K) = f((a-b)\cdot(a-b)^{-1}) = f(a-b) \cdot f((a-b)^{-1}) = 0_L \cdot f((a-b)^{-1}) = 0_L$. Absurdo!

$\therefore$ f é injetora ∎

(14) Mostre que o conjunto dos números reais algébricos é enumerável.

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto dos números algébricos e $\mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinômios de grau $\leq n$ com coeficientes inteiros. Agora considere $\mathcal{A}_n = \{x \in \mathcal{A} : \exists\, p \in \mathcal{P}_n$ com x raiz de $p\}$. Como todo $p \in \mathcal{P}_n$ possui no máximo n raízes, temos que $R_p = \{x \in \mathcal{A}_n : x$ é raiz de $p\}$ é finito e tem no máximo n elementos.

Claro que $\mathcal{P}_n$ é enumerável, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois $\mathbb{Z}^{n+1}$ é enumerável e $g: \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$ definida por $g(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathcal{P}_n$ é bijetora.

Mas $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ e $\mathcal{A}_n = \bigcup_{p \in \mathcal{P}_n} R_p$, donde $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{p \in \mathcal{P}_n} R_p \right)$ e daí $\mathcal{A}$ é uma união enumerável de uma união enumerável de conjuntos finitos e, portanto $\mathcal{A}$ é um conjunto enumerável.

(15) Mostre que se um número real $\alpha \neq 0$ é algébrico, então $-\alpha$ e α^{-1} são algébricos.

Seja α um número real algébrico com $\alpha \neq 0$, então $\exists\, n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathcal{P}_n$ um polinômio de grau n com coeficientes inteiros, isto é, $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $\forall x \in \mathbb{R}$, com $a_j \in \mathbb{Z}$, $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $a_0 \neq 0$ (pois $\alpha \neq 0$) tal que α é raiz de p, ou seja, $p(\alpha) = 0$. Então, para mostrarmos que $-\alpha$ e α^{-1} são algébricos, vamos demonstrar que existem polinômios q_1 e q_2 com coeficientes inteiros, tais que $q_1(-\alpha) = 0$ e $q_2(\alpha^{-1}) = 0$

Então defina $q_1(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, com $b_j=(-1)^j\cdot a_j$, isto é, $q_1(x)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j a_j X^j=$

$=a_0-a_1X+a_2X^2-\dots+(-1)^nX^n$. Sendo assim, $q_1(-\alpha)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\cdot a_j\cdot(-\alpha)^j=$

$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{2j}a_j\alpha^j=\sum_{j=0}^{n}a_j\alpha^j=p(\alpha)=0$. Logo, $-\alpha$ é raiz de q_1, donde $-\alpha$ é algébrico.

Agora defina $q_2(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jX^j$, com $c_j=a_{n-j}$, isto é, $q_2(x)=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}X^j=$

$=a_n+a_{n-1}X+a_{n-2}X^2+\dots+a_1X^{n-1}+a_0X^n$. Sendo assim, $q_2(\alpha^{-1})=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}(\alpha^{-1})^j=$

$=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\cdot\alpha^{-j}=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\cdot\alpha^{n}\cdot\alpha^{-j}\cdot\alpha^{-n}=\alpha^{-n}\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\cdot\alpha^{n-j}=\alpha^{-n}\sum_{k=0}^{n}a_k\alpha^k=\alpha^{-n}\cdot p(\alpha)=$

$\alpha^{-n}\cdot 0=0$. Logo, α^{-1} é raiz de q_2, donde α^{-1} é algébrico.

16) Mostre que se α e β são números reais algébricos, então $\alpha+\beta$ e $\alpha\cdot\beta$ também são algébricos. Usando os resultados do exercício anterior e deste, mostre que o conjunto dos números algébricos forma um corpo.

Sendo α e β algébricos, existem polinômios p e q de coeficientes inteiros de menores graus m e n respectivamente tais que α e β são raízes de p e q respectivamente, i.e., α é raiz de $p(x)=\sum_{i=0}^{m}a_iX^i$ e β é raiz de $q(x)=\sum_{i=0}^{n}b_iX^i$, com $\{a_0,\dots,a_m,b_0,\dots,b_n\}\subseteq\mathbb{Z}$.

Vamos mostrar que $\exists\ r(x)=\sum_{i=0}^{m+n}c_iX^i$ um polinômio de coeficientes inteiros de grau $m+n$ que anula $\alpha+\beta$. Para isto, note que $p(\alpha)=0$ e $q(\alpha)=0$ implicam que (*) $\alpha^m=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{a_i}{a_m}\cdot\alpha^i$ e $\beta^n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b_i}{b_n}\beta^i$ são combinações lineares racionais das potências menores de α e β. Como queremos $r(\alpha+\beta)=0$, temos que obter um vetor $\bar{c}=(c_0,c_1,\dots,c_m,c_{m+1},\dots,c_{m+n})$ de $m+n+1$ coordenadas que resolve $r(\alpha+\beta)=0$. Mas, usando (*) algumas vezes e que $\{\alpha^i\}_{i=0,\dots,m-1}$ e $\{\beta^i\}_{i=0,\dots,n-1}$ são $\mathbb{Q}$ linearmente independentes em $\mathbb{R}$, obtemos que $\exists\ \bar{c}\in\mathbb{Q}^{m+n+1}$ com $\bar{c}\neq\emptyset$ que resolvem o sistema linear gerado.

Sendo assim, algum múltiplo inteiro de $\bar{C}$ está em $\mathbb{Z}^{m+n+1}$ e daí obtemos o polinômio desejado (Muita Álgebra Linear).

O caso $\alpha \cdot \beta$ é parecido

Sendo assim, o conjunto $\mathcal{A}$ dos números algébricos são fechados para a multiplicação, para a divisão e $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{A}$. $\therefore$ $\mathcal{A}$ é um corpo. $\blacksquare$

17) Mostre que pelo menos um dos números $e \cdot \pi$ e $e + \pi$ é irracional.

Suponha que ambos sejam racionais. Então $p(x) = x^2 - (e+\pi)x + e\pi \in \mathbb{Q}[X]$ tem raízes algébricas. Mas $p(\pi) = p(e) = 0$, donde π e e seriam números algébricos. $\mathcal{E}$ $\blacksquare$