1) Mostre que são equivalentes:

(a) $A \subseteq B$ (b) $A \cap B = A$ (c) $A \cup B = B$

(a) $\Rightarrow$ (b)

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$. Então, é claro que $A \cap B \subseteq A$

Queremos mostrar que $A \subseteq A \cap B$: Tome $x \in A$. Por hipótese, $A \subseteq B$ e, portanto $x \in B$. Dessa forma, $x \in A \cap B$, donde $A \subseteq A \cap B$.

Como $A \cap B \subseteq A$ e $A \subseteq A \cap B$, temos que $A \cap B = A$ ∎

(b) $\Rightarrow$ (c)

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Então, é claro que $B \subseteq A \cup B$

Queremos mostrar que $A \cup B \subseteq B$: Tome $x \in A \cup B$. Então, $x \in A$ ou $x \in B$.

Se $x \in B$, não há o que fazer. Se $x \in A$, por hipótese, temos que $A = A \cap B$ e, portanto $x \in A \cap B$. Daí, vem que $x \in B$, donde $A \cup B \subseteq B$.

Como $A \cup B \subseteq B$ e $B \subseteq A \cup B$, temos que $A \cup B = B$ ∎

(c) $\Rightarrow$ (a)

Queremos mostrar que $A \subseteq B$: tome $x \in A$. Então $x \in A \cup B$.

Mas, por hipótese, $A \cup B = B$ e, portanto, $x \in B$.

Dessa forma, temos que $A \subseteq B$ ∎

2) Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ funções. Mostre que:

a) f e g injetoras $\Rightarrow$ $g \circ f$ injetora

Para mostrar que $(g \circ f)$ é injetora, vamos mostrar que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ implica em $x_1 = x_2$:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \xRightarrow[\text{da composição}]{\text{definição}} g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \xRightarrow[\text{g é injetora}]{} f(x_1) = f(x_2) \xRightarrow[\text{f é injetora}]{} x_1 = x_2$$ ∎

b) $g \circ f$ injetora $\Rightarrow$ f injetora

$$f(x_1) = f(x_2) \xRightarrow[\text{g é função}]{} g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \xRightarrow[\text{da composição}]{\text{definição}} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \xRightarrow[\text{g∘f é injetora}]{} x_1 = x_2.$$

$\therefore f$ é injetora ∎

(c) $g \circ f$ injetora e f sobrejetora $\Longrightarrow$ g injetora

$g(y_1) = g(y_2) \underset{f \text{ é sobrejetora}}{\Longrightarrow} \exists\, x_1 \in X$ e $\exists\, x_2 \in X$ tq. $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$,

portanto $g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \underset{\text{definição de composição}}{\Longrightarrow} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Longrightarrow$

$\underset{(g\circ f) \text{ é injetora}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \underset{f \text{ é função}}{\Longrightarrow} y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, ie, $y_1 = y_2$. $\therefore$ g é injetora ∎

d) $g \circ f$ sobrejetora e g injetora $\Longrightarrow$ f sobrejetora

Para mostrar que f é sobrejetora, vamos mostrar que $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tq. $y = f(x)$:

Então, tome $y \in Y$ e seja $z = g(y) \in Z \underset{g\circ f \text{ sobrejetora}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in X$ tq. $z = (g \circ f)(x)$,

donde $g[f(x)] = g(y) \underset{g \text{ é injetora}}{\Longrightarrow} y = f(x)$ ∎

(3) Seja $f: X \to Y$ função. Mostre que f é injetora $\Longleftrightarrow$ $f^{-1}[f(A)] = A,\ \forall A \subseteq X$

Ressaltamos que é sempre válido que $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$, pois $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

($\Longrightarrow$) Vamos mostrar que $f^{-1}[f(A)] \subseteq A$:

Tome $x \in f^{-1}[f(A)]$, ie, tome $x \in X$ tq. $f(x) \in f(A)$. Como $f(x) \in f(A)$, $\exists\, x' \in A$ tq. $f(x) = f(x')$. Mas, como f é injetora, temos que $x = x'$ e, portanto, $x \in A$ ∎

($\Longleftarrow$) $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow$ Tome $A = \{x_1\}$. Então, por hipótese, $f^{-1}[f(A)] = A$. Como $f(A) = \{f(x_1)\}$ temos que $f^{-1}\{f(x_1)\} = \{x_1\}$. Mas $f(x_2) = f(x_1)$, donde $f(x_2) \in \{f(x_1)\} = f(A)$. Portanto, $x_2 \in f^{-1}[f(A)] = A = \{x_1\}$, isto é, $x_2 = x_1$. $\therefore$ f é injetora ∎

④ Seja $f: X \to Y$ uma função. Mostre que f é injetora se, e somente se, para todo par de subconjuntos de X, vale $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

Ressaltamos que é sempre válido que $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$, pois $y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow \exists x \in A$ tq. $f(x) = y$ e $\forall z \in B$, $f(z) \neq y$. Mas, então $\forall x \in A$ tq. $f(x) = b$, temos que $x \notin B$ e, portanto, $x \in A \setminus B$, donde $y = f(x) \in f(A \setminus B)$

($\Rightarrow$) f injetora $\Rightarrow f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$, $\forall A, B \subseteq X$

Tome $y \in f(A \setminus B)$. Então, $\exists x \in A \setminus B$ tq. $f(x) = y$.

Como $A \setminus B \subseteq A$, temos que $x \in A$ e daí $y = f(x) \in f(A)$

Como $A \setminus B \subseteq B^c$, temos que $x \notin B$ e, como f é injetora, $\nexists x' \in B$ tq. $f(x') = y$ e, portanto, $y \notin f(B)$. $\therefore y \in f(A) \setminus f(B)$, donde $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ ∎

($\Leftarrow$) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$, $\forall A, B \subseteq X \Rightarrow f$ injetora

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ tomando $A = \{x_1\}$ e $B = \{x_2\}$, temos que $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B) = f\{x_1\} \setminus f\{x_2\} = \{f(x_1)\} \setminus \{f(x_2)\} = \emptyset$ e, portanto, $f(A \setminus B) = \emptyset$, donde $A \setminus B = \emptyset$. Mas, $A \setminus B = \{x_1\} \setminus \{x_2\}$ e, como $A \setminus B = \emptyset$, temos que $x_1 = x_2$ e, portanto, f é injetora.

⑤ Seja $f: X \to Y$ função e $A, B \subseteq X$. Mostre que:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

($f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$): Tome $y \in f(A \cup B)$. Então $\exists x \in A \cup B$ tq. $y = f(x)$. Se $x \in A$, $y \in f(A) \subseteq f(A) \cup f(B)$ e se $x \in B$, $y \in f(B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. De qualquer forma, $y \in f(A) \cup f(B)$ e, portanto, $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ ∎

($f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$): Tome $y \in f(A) \cup f(B)$. Então, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$, isto é, ou $\exists x \in A \subseteq A \cup B$ tq. $y = f(x)$ ou $\exists x \in B \subseteq A \cup B$ tq. $y = f(x)$. De qualquer forma, $\exists x \in A \cup B$ tq. $y = f(x)$ e, portanto, $y \in f(A \cup B)$. $\therefore f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ ∎

Como $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ e $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$, vem que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ∎

b) $f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$

Tome $y\in f(A\cap B)$. Então $\exists\, x\in A\cap B$ tq. $y=f(x)$. Mas, claro que $x\in A\cap B\subseteq A$ e, portanto, $y=f(x)\in f(A)$ e $x\in A\cap B\subseteq B$ e, portanto, $y=f(x)\in f(B)$. Logo, $y\in f(A)\cap f(B)$ $\therefore$ $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ ∎

c) Exiba X, Y conjuntos e $f: X\to Y$ funções tais que existam $A, B\subseteq X$ satisfazendo $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$

Mostramos em b) que sempre vale que $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$. Portanto, temos que achar f tal que $f(A)\cap f(B)\nsubseteq f(A\cap B)$.

PROPRIEDADE: $f(A)\cap f(B)\subseteq f(A\cap B), \forall A, B\subseteq X \Leftrightarrow f$ é injetora

($\Rightarrow$) Sejam $f(x_1)=f(x_2)$. Tome $A=\{x_1\}$ e $B=\{x_2\}$. Então, $f(A)\cap f(B)\subseteq f(A\cap B)$, i.e., $\{f(x_1)\}=\{f(x_1)\}\cap\{f(x_2)\}=f\{x_1\}\cap f\{x_2\}\subseteq f(\{x_1\}\cap\{x_2\})$, e, portanto, $\{x_1\}\cap\{x_2\}\neq\emptyset$, donde $x_1=x_2$. $\therefore$ f é injetora ∎

($\Leftarrow$) Tome $y\in f(A)\cap f(B)$. Então $y\in f(A)$ e $y\in f(B)$, isto é, $\exists\, x_A\in A$ tq. $y=f(x_A)$ e $\exists\, x_B\in B$ tq. $y=f(x_B)$. Como f é injetora, temos que $x_A=x_B$ e, portanto, $x_A\in A\cap B$, donde $y=f(x_A)\in f(A\cap B)$ ∎

Dessa forma, temos que procurar f não injetora para responder ao ítem: sejam $X=Y=\mathbb{R}$ e $f: X\to Y$ definida por $f(x)=x^2$. Agora, tome $A=\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ e $B=\mathbb{R}_-=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 0\}$.

Então, temos que $f(A\cap B)=f(\mathbb{R}_+\cap\mathbb{R}_-)=f(\{0\})=\{0\}\neq\mathbb{R}_+=\mathbb{R}_+\cap\mathbb{R}_+=f(\mathbb{R}_+)\cap f(\mathbb{R}_-)=f(A)\cap f(B)$.

6) Mostre que a composição de funções é associativa.

Sejam X, Y, Z e W conjuntos e $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ e $h: Z\to W$ funções. Mostrar a associatividade é mostrar que $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$, isto é, que $h\circ(g\circ f): X\to W$ é igual a $(h\circ g)\circ f: X\to W$, ou ainda que $[h\circ(g\circ f)](x)=[(h\circ g)\circ f](x), \forall x\in X$. Seja $x\in X$, então:

$[h\circ(g\circ f)](x)=h[(g\circ f)(x)]=h[g(f(x))]$ e

$[(h\circ g)\circ f](x)=(h\circ g)(f(x))=h[g(f(x))]$ ∎

⑦ Mostre que dado $f: X \to Y$, se $\exists g_1: Y \to X$ e $\exists g_2: Y \to X$, respectivamente inversas à esquerda e à direita para f, então $g_1 = g_2$

Queremos mostrar que $g_1(y) = g_2(y)$, $\forall y \in Y$ e sabemos que $(g_1 \circ f)(x) = x$, $\forall x \in X$ e $(f \circ g_2)(y) = y$, $\forall y \in Y$. Mas, dado $y \in Y$, temos:

$$g_1(y) \underset{\substack{g_2 \text{ é inv. à} \\ \text{direita de } f}}{=} g_1[(f \circ g_2)(y)] \underset{\text{associativa}}{=} (g_1 \circ f)\underbrace{(g_2(y))}_{\in X} \underset{\substack{g_1 \text{ é inv. à} \\ \text{esquerda de } f}}{=}$$

$= g_2(y)$. $\therefore g_1 = g_2$ ∎

⑧ Exiba X, Y conjuntos e uma função $f: X \to Y$ tais que f possua uma inversa à esquerda (exiba a inversa) e não possua uma inversa à direita.

Como veremos no ex. ⑨, é preciso que f seja injetora e não seja sobrejetora.

Sejam $X = \mathbb{N} = Y$ e $f: X \to Y$, definida por $f(n) = n+1$.
Então, defina $g: Y \to X$, como $g(n) = \begin{cases} n-1, & \text{se } n \neq 1 \\ 17, & \text{se } n = 1 \end{cases}$

Dessa forma, temos que g é inversa à esquerda de f, pois dado $n \in \mathbb{N}$, temos $(g \circ f)(n) = g[\underbrace{f(n)}_{\neq 1}] = f(n) - 1 = (n+1) - 1 = n$

Entretanto, $\nexists g: Y \to X$ inversa à direita de f, pois se o fosse, teríamos $(f \circ g)(1) = 1$. Mas $(f \circ g)(1) = f[g(1)] = 1$, o que acarretaria que $1 \in Im(f)$, o qual é falso.

⑨ Mostre que $f: X \to Y$ possui inversas à esquerda e à direita se, e somente se, f é uma bijeção, ie, f é injetora e sobrejetora.

Para mostrar o que se pede, vamos demonstrar 2 propriedades que, juntas, acarretam facilmente no que foi pedido:

(a) f possui inversa à esquerda se, e somente se, f é injetora;

(b) f possui inversa à direita se, e somente se, f é sobrejetora (a)($\Rightarrow$) Seja g a inversa à esquerda de f e $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então, como g é função, temos que $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow$ $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \underset{g\circ f = I_X}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \Rightarrow f$ é injetora ▪

($\Leftarrow$) Claro que $X \neq \emptyset$. Então $\exists\, \bar{x} \in X$. Dessa forma, defina a função g como segue: $g: Y \to X$ e $g(y) = \bar{x}$ se $y \notin Im(f)$ e $g(y)$ é o $\underbrace{\text{único}}_{f \text{ injetora}}$ elemento pertencente ao conjunto $f^{-1}(\{y\})$, se $y \in Im(f)$.

Então, g é inversa à esquerda de f, pois $(g \circ f)(x) = g[\underbrace{f(x)}_{f(x) \in Im(f)}] = x, \forall x \in X$ ▪

(b)($\Rightarrow$) Seja g a inversa à direita de f, isto é, $(f \circ g)(y) = y, \forall y \in Y$. Então tome $y \in Y$. Temos que $(f \circ g)(y) = y$, donde $f[g(y)] = y$. Dessa forma, tomando $x = g(y) \in X$, temos que $f(x) = y$ e, portanto, f é sobrejetora ▪

($\Leftarrow$) Como f é sobrejetora, $\forall y \in Y$, temos que $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Dessa forma, use o Axioma da Escolha, para tomar um ponto $x_y \in f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$ para cada ponto $y \in Y$. Sendo assim, temos que $g: Y \to X$, definida por $g(y) = x_y$ é uma inversa à direita de f, pois dado $y \in Y$, temos que $(f \circ g)(y) = f[g(y)] =$ $= f[\underbrace{x_y}_{x_y \in f^{-1}(\{y\})}] = y$ ▪

(10) Seja X um conjunto. Mostre que não existe $f: \mathcal{P}(X) \to X$ injetora.

O Teorema de Cantor mostrado em sala, demonstra que $\nexists\, g: X \to \mathcal{P}(X)$ sobrejetora. Sendo assim, vamos mostrar que dados conjuntos quaisquer A e B, temos que $\exists\, f: A \to B$ injetora $\Leftrightarrow \exists\, g: B \to A$ sobrejetora, donde segue o resultado.

($\Leftrightarrow$) Sendo $f: A \to B$ injetora, vamos construir $g: B \to A$ sobrejetora:

$\exists\, f: A \to B$ injetora $\underset{9(a)}{\Longleftrightarrow} \exists\, g: B \to A$ inversa à esquerda de $f \underset{\text{Definição}}{\Longleftrightarrow} \exists\, f: A \to B$ inversa à direita de $g \overset{9(b)}{\Longleftrightarrow} \exists\, g: B \to A$ sobrejetora.

$\therefore \nexists\, f: \mathcal{P}(X) \to X$ injetora ▪