

Álgebra linear

araujofpinto

IME-USP

janeiro 2019

Soma direta

Definicao

Sejam V um espaço vetorial real e U, W subespaços de V . Dizemos que V é soma direta de U e W e denotamos por $V = U \oplus W$ se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0_V\}$.

Soma direta

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e U, W subespaços de V . Então $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo elemento $v \in V$ se escreve, de modo único, como soma $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$.

Soma direta

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e U, W subespaços de V . Então $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo elemento $v \in V$ se escreve, de modo único, como soma $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Dado $v \in V$, como $V = U + W$, existem $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$ tais que $v = u_1 + w_1$. Suponha que existam $u_2 \in U$ e $w_2 \in W$ tais que $v = u_2 + w_2$, então $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, logo $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$. Como U e W são subespaços vetoriais de V , temos que $u_1 - u_2 \in U$ e $w_2 - w_1 \in W$. Como $u_1 - u_2$ e $w_2 - w_1$ são iguais, segue que $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0_V\}$, logo $u_1 - u_2 = 0_V = w_2 - w_1$, e, portanto, $u_1 = u_2$ e $w_2 = w_1$. Logo $v = u_1 + w_1$ se escreve de forma única como soma de vetores de U e W . $\square$

$\square$

Soma direta

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e U, W subespaços de V . Então $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo elemento $v \in V$ se escreve, de modo único, como soma $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$.

Soma direta

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e U, W subespaços de V . Então $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo elemento $v \in V$ se escreve, de modo único, como soma $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$.

Demonstração.

($\Leftarrow$) Dado $v \in V$, temos que $v = u + w$ se escreve de forma única como soma de vetores de U e W . Como existe uma forma de escrever v dessa forma, segue que $V = U + W$. Para verificar que a soma é direta, suponha que existe $v_0 \in U \cap W$ com $v_0 \neq 0_V$. Então $0_V = 0_V + 0_V = v_0 + (-v_0)$ não se escreveria de forma única como soma de vetores de U e W . Logo $U \cap W = \{0_V\}$ e $V = U \oplus W$. $\square$



Soma direta: exemplos

- (i) Sejam $W_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x e $W_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y em $\mathbb{R}^2$. W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ gerados pelos vetores canônicos $\vec{i} = e_1 = (1, 0)$ e $\vec{j} = e_2 = (0, 1)$, ou seja $W_1 = [e_1]$ e $W_2 = [e_2]$. Então, o $\mathbb{R}^2$ é soma direta de W_1 e W_2 ($\mathbb{R}^2 = U \oplus W$).

Soma direta: exemplos

- (ii) Sejam $W_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}\}$ o eixo x ,
 $W_2 = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}\}$ o eixo y e
 $W_3 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3, z \in \mathbb{R}\}$ o eixo z em $\mathbb{R}^3$.
 W_1 , W_2 e W_3 são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ gerados pelos
vetores canônicos $\vec{i} = e_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = e_2 = (0, 1, 0)$ e
 $\vec{k} = e_3 = (0, 0, 1)$, ou seja $W_1 = [e_1]$, $W_2 = [e_2]$ e $W_3 = [e_3]$.
Então, o $\mathbb{R}^3$ é soma direta de W_1 , W_2 e W_3
($\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$).

Soma direta: exemplos

- (iii) Sejam $W_1 = \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, x_1 \in \mathbb{R}\}$,
 $W_2 = \{(0, x_2, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}\}, \dots,$
 $W_n = \{(0, 0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \in \mathbb{R}\}$ os *eixos coordenados* em $\mathbb{R}^n$.

$W_1, W_2, \dots, W_n$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ gerados pelos vetores canônicos $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$,
 $e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$, ou seja $W_1 = [e_1]$,
 $W_2 = [e_2], \dots, W_n = [e_n]$.

Então, o $\mathbb{R}^n$ é soma direta de $W_1, W_2, \dots, W_n$
($\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$).

Soma direta: exemplos

- (iv) Sejam $\pi_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ o *plano* x, y e $W_3 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3, z \in \mathbb{R}\}$ o *eixo* z em $\mathbb{R}^3$.
Então, o $\mathbb{R}^3$ é soma direta de π_1 e W_3 ($\mathbb{R}^3 = \pi_1 \oplus W_3$).

Soma direta: exemplos

- (v) Sejam $\pi_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ o *plano* x, y e $\pi_3 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ o *plano* y, z em $\mathbb{R}^3$. Então, o $\mathbb{R}^3$ é soma de π_1 e π_3 mas não é soma direta de π_1 e π_3 , pois $\pi_1 \cap \pi_3 = W_2$.

Soma direta: exemplos

- (vi) Sejam $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e u_1, u_2, w em V dados por $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$ e $w(x) = x^2$. Sejam $U = [u_1, u_2] = \{p \in V : p(x) = c + bx\}$ e $W = [w] = \{p \in V : p(x) = ax^2\}$ os subespaços vetoriais de V gerados por u_1 e u_2 e por w . Então, o $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é soma direta de U e W , $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = U \oplus W)$.

Definicao

Sejam V um espaço vetorial real e X subconjunto de V . Dizemos que X é linearmente independente (L.I.) se nenhum de seus vetores for combinação linear de outros vetores de X . Para evitar ambiguidades, dizemos que o conjunto vazio $\emptyset$ é L.I. e um conjunto unitário $X = \{v\}$ é L.I. se $v \neq 0_V$. Se um conjunto não é linearmente independente, dizemos que este é linearmente dependente (L.D.).

Definicao

Sejam V um espaço vetorial real e X subconjunto de V . Dizemos que X é linearmente independente (L.I.) se nenhum de seus vetores for combinação linear de outros vetores de X . Para evitar ambiguidades, dizemos que o conjunto vazio $\emptyset$ é L.I. e um conjunto unitário $X = \{v\}$ é L.I. se $v \neq 0_V$. Se um conjunto não é linearmente independente, dizemos que este é linearmente dependente (L.D.).

Se um conjunto é L.I., dizemos que *seus vetores* são linearmente independentes e se um conjunto é L.D., dizemos que *seus vetores* são linearmente dependentes.

Se $0_V \in X$, então X é L.D.

L.I. x L.D.: exemplos

(i) $X = \{1\}$ é L.I. em $\mathbb{R}$;

L.I. x L.D.: exemplos

- (i) $X = \{1\}$ é L.I. em $\mathbb{R}$;
- (ii) $X = \{e_1, e_2\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^2$;

L.I. x L.D.: exemplos

- (i) $X = \{1\}$ é L.I. em $\mathbb{R}$;
- (ii) $X = \{e_1, e_2\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^2$;
- (iii) $X = \{e_1, e_2, e_3\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^3$;

L.I. x L.D.: exemplos

- (i) $X = \{1\}$ é L.I. em $\mathbb{R}$;
- (ii) $X = \{e_1, e_2\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^2$;
- (iii) $X = \{e_1, e_2, e_3\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^3$;
- (iv) $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^n$;

L.I. x L.D.: exemplos

(v) $\{(a, b), (c, d)\}$ é L.I. $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

L.I. x L.D.: exemplos

- (v) $\{(a, b), (c, d)\}$ é L.I. $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$
- (vi) Qualquer conjunto com 3 vetores de $\mathbb{R}^2$ é L.D.

L.I. x L.D.: exemplos

- (v) $\{(a, b), (c, d)\}$ é L.I. $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$
- (vi) Qualquer conjunto com 3 vetores de $\mathbb{R}^2$ é L.D.
- (vii) Qualquer conjunto com $n + 1$ vetores de $\mathbb{R}^n$ é L.D.

L.I. x L.D.: exemplos

- (v) $\{(a, b), (c, d)\}$ é L.I. $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$
- (vi) Qualquer conjunto com 3 vetores de $\mathbb{R}^2$ é L.D.
- (vii) Qualquer conjunto com $n + 1$ vetores de $\mathbb{R}^n$ é L.D.
- (viii) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é L.I. em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

L.I. x L.D.: exemplos

$$(ix) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ é L.I. em } M_2(\mathbb{R})$$

Equivalência L.I.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e X subconjunto de V . Então X é L.I. $\Leftrightarrow$ dados $v_1, v_2, \dots, v_k$ em X , $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. (Ou seja, X é L.I. se, e somente se, a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear de vetores de X é com todos os coeficientes da combinação linear iguais a 0.)

Equivalência L.I.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e X subconjunto de V . Então X é L.I. $\Leftrightarrow$ dados $v_1, v_2, \dots, v_k$ em X , $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. (Ou seja, X é L.I. se, e somente se, a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear de vetores de X é com todos os coeficientes da combinação linear iguais a 0.)

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha que X é L.I. e que existem $v_1, v_2, \dots, v_k$ em X tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ com $\alpha_j \neq 0$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Sem perda de generalidade, considere $j = k$. Então $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ pode ser reescrito isolando v_k de forma que $v_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} v_2 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} v_{k-1}$ e, portanto, v_k é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$, donde X seria L.D.



Equivalência L.I.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e X subconjunto de V . Então X é L.I. $\Leftrightarrow$ dados $v_1, v_2, \dots, v_k$ em X , $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. (Ou seja, X é L.I. se, e somente se, a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear de vetores de X é com todos os coeficientes da combinação linear iguais a 0.)

Equivalência L.I.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e X subconjunto de V . Então X é L.I. $\Leftrightarrow$ dados $v_1, v_2, \dots, v_k$ em X , $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. (Ou seja, X é L.I. se, e somente se, a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear de vetores de X é com todos os coeficientes da combinação linear iguais a 0.)

Demonstração.

($\Leftarrow$) Suponha que X é L.D. Então ou $X = \{0_V\}$ ou existem $v, v_1, v_2, \dots, v_k$ em X tais que v é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_k$. Em ambos os casos, chegamos a um absurdo, pois, se $X = \{0_V\}$, temos que $\alpha \cdot 0_V = 0_V$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, e, se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, então $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k - v = 0_V$ e, pelo menos o coeficiente -1 que multiplica v é não-nulo.



Equivalência L.I.

Corolário

Sejam X um conjunto L.I. de um espaço vetorial V e $v_1, v_2, \dots, v_k \in X$. Se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$, então $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k$, isto é, o vetor v se escreve de forma única como combinação linear de vetores de X .

Equivalência L.I.

Corolário

Sejam X um conjunto L.I. de um espaço vetorial V e $v_1, v_2, \dots, v_k \in X$. Se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$, então $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k$, isto é, o vetor v se escreve de forma única como combinação linear de vetores de X .

Demonstração.

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k \Rightarrow \\ (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k &= 0_V \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \\ \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_k - \beta_k &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k \end{aligned}$$



Equivalência L.I.

Corolário

Sejam X um conjunto L.I. de um espaço vetorial V e $v_1, v_2, \dots, v_k \in X$. Se $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$, então $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k$, isto é, o vetor v se escreve de forma única como combinação linear de vetores de X .

Demonstração.

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k \Rightarrow \\ (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k &= 0_V \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \\ \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_k - \beta_k &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k \end{aligned}$$



Corolário

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ é um conjunto L.I., então $[\mathcal{B}] = [v_1] \oplus \dots \oplus [v_k]$

Definicao

Seja V um espaço vetorial real. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base de V se $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. que gere V .

Definicao

Seja V um espaço vetorial real. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base de V se $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. que gere V .

Se $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I., então $\mathcal{B}$ é base do subespaço vetorial S de V gerado por $\mathcal{B}$. ($S = \text{span}\mathcal{B} = [\mathcal{B}]$)

Bases: exemplos

(i) $X = \{1\}$ é base de $\mathbb{R}$;

Bases: exemplos

- (i) $X = \{1\}$ é base de $\mathbb{R}$;
- (ii) $X = \{e_1, e_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$;

Bases: exemplos

- (i) $X = \{1\}$ é base de $\mathbb{R}$;
- (ii) $X = \{e_1, e_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$;
- (iii) $X = \{e_1, e_2, e_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$;

Bases: exemplos

- (i) $X = \{1\}$ é base de $\mathbb{R}$;
- (ii) $X = \{e_1, e_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$;
- (iii) $X = \{e_1, e_2, e_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$;
- (iv) $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$;

Bases: exemplos

(v) $\{(a, b), (c, d)\}$ é base de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$;

Bases: exemplos

- (v) $\{(a, b), (c, d)\}$ é base de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$;
- (vi) Qualquer conjunto com k vetores de $\mathbb{R}^2$ não é base de $\mathbb{R}^2$ se $k \neq 2$;

Bases: exemplos

- (v) $\{(a, b), (c, d)\}$ é base de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$;
- (vi) Qualquer conjunto com k vetores de $\mathbb{R}^2$ não é base de $\mathbb{R}^2$ se $k \neq 2$;
- (vii) Qualquer conjunto com k vetores de $\mathbb{R}^n$ não é base de $\mathbb{R}^n$ se $k \neq n$;

Bases: exemplos

- (v) $\{(a, b), (c, d)\}$ é base de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$;
- (vi) Qualquer conjunto com k vetores de $\mathbb{R}^2$ não é base de $\mathbb{R}^2$ se $k \neq 2$;
- (vii) Qualquer conjunto com k vetores de $\mathbb{R}^n$ não é base de $\mathbb{R}^n$ se $k \neq n$;
- (viii) $\{(1, 0, -\frac{2}{7}), (0, 1, \frac{3}{7})\}$ é base de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 7z = 0\}$

Bases: exemplos

(ix) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é base de $M_2(\mathbb{R})$;

Bases: exemplos

- (ix) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é base de $M_2(\mathbb{R})$;
- (x) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

Bases: exemplos

- (ix) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é base de $M_2(\mathbb{R})$;
- (x) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$
- (xi) $\{\sin x, \cos x\}$ é base de $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f'' + f = 0\}$

Espaços finitamente gerados

Quando um espaço vetorial real V tem uma base com número finito de elementos, dizemos que V é finitamente gerado.

Espaços finitamente gerados

Quando um espaço vetorial real V tem uma base com número finito de elementos, dizemos que V é finitamente gerado.

Quando uma base $\mathcal{B}$ de V é finita, um vetor v em $V (= \text{span}(\mathcal{B}) = \text{espaço gerado por } \mathcal{B})$ tem como coordenadas na base $\mathcal{B}$ os coeficientes (únicos) da combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$. Ou seja, se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é base de V e um vetor $v \in V$ é escrito como $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, então $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são as coordenadas de v na base $\mathcal{B}$ e denotamos por $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)_{\mathcal{B}}$.

Espaços finitamente gerados

Quando um espaço vetorial real V tem uma base com número finito de elementos, dizemos que V é finitamente gerado.

Quando uma base $\mathcal{B}$ de V é finita, um vetor v em $V (= \text{span}(\mathcal{B}) = \text{espaço gerado por } \mathcal{B})$ tem como coordenadas na base $\mathcal{B}$ os coeficientes (únicos) da combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$. Ou seja, se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é base de V e um vetor $v \in V$ é escrito como $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$, então $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ são as coordenadas de v na base $\mathcal{B}$ e denotamos por $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)_{\mathcal{B}}$.

Portanto, dado $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Bases: exemplos

Todas as bases de V tem mesma quantidade de vetores?

Bases: exemplos

Todas as bases de V tem mesma quantidade de vetores? R: Se V tem base finita, sim.

Bases: exemplos

Todas as bases de V tem mesma quantidade de vetores? R: Se V tem base finita, sim. (Infinita também)

Bases: exemplos

Todas as bases de V tem mesma quantidade de vetores? R: Se V tem base finita, sim. (Infinita também)

(Todo espaço vetorial tem uma base. A existência de uma base de um espaço vetorial que não é finitamente gerado é equivalente ao axioma da escolha.)

Lema conhecido

Lema

Um sistema linear homogêneo $m \times n$ (m equações e n incógnitas) com $m < n$ é um SPI com pelo menos $n - m \geq 1$ graus de liberdade (exatamente $n - r$ graus de liberdade, $r \leq m$): infinitas soluções, mas pelo menos uma solução não trivial.

Lema conhecido

Lema

Um sistema linear homogêneo $m \times n$ (m equações e n incógnitas) com $m < n$ é um SPI com pelo menos $n - m \geq 1$ graus de liberdade (exatamente $n - r$ graus de liberdade, $r \leq m$): infinitas soluções, mas pelo menos uma solução não trivial.

Demonstração.



Teorema chave

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e S um subespaço vetorial de V gerado por um conjunto com m vetores. Então qualquer conjunto com mais que m vetores de S é L.D.

Teorema chave

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e S um subespaço vetorial de V gerado por um conjunto com m vetores. Então qualquer conjunto com mais que m vetores de S é L.D.

Demonstração.

Seja $X = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ gerador de S com m elementos. Considere $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset S$ com $n > m$. Vamos mostrar que X é L.D., ou seja, que podemos escrever o vetor nulo como combinação linear não-nula dos vetores de X , ou ainda, que

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0_V$ tem solução não-trivial. Como X gera S , cada v_j de Y se escreve como combinação linear dos vetores de X , ou seja, $v_j = \alpha_{1j} w_1 + \alpha_{2j} w_2 + \dots + \alpha_{mj} w_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.



Teorema chave

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e S um subespaço vetorial de V gerado por um conjunto com m vetores. Então qualquer conjunto com mais que m vetores de S é L.D.

Demonstração.

Substituindo as relações, temos $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_1(\alpha_{11} w_1 + \alpha_{21} w_2 + \cdots + \alpha_{m1} w_m) + \cdots + \lambda_n(\alpha_{1n} w_1 + \alpha_{2n} w_2 + \cdots + \alpha_{mn} w_m) = 0_V$, ou ainda $\sum_{j=1}^n \lambda_j (\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} w_i) = 0_V$. Reorganizando as parcelas dos somatórios, obtemos

$(\lambda_1 \alpha_{11} + \cdots + \lambda_n \alpha_{1n}) w_1 + \cdots + (\lambda_1 \alpha_{m1} + \cdots + \lambda_n \alpha_{mn}) w_m = 0_V$, ou ainda, $\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_{ij}) w_i = 0_V$.



Teorema chave

Teorema

Sejam V um espaço vetorial real e S um subespaço vetorial de V gerado por um conjunto com m vetores. Então qualquer conjunto com mais que m vetores de S é L.D.

Demonstração.

Não sabemos se X é L.I. ou L.D., mas sabemos que a equação acima será válida sempre que $(\lambda_1\alpha_{i1} + \cdots + \lambda_n\alpha_{in}) = (\sum_{j=1}^n \lambda_j\alpha_{ij}) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, chegamos a um sistema homogêneo com mais incógnitas que equações, logo existe uma solução não-trivial, donde Y é L.D. (Observe que podem haver mais soluções caso X for L.D., mesmo que $(\lambda_1\alpha_{i1} + \cdots + \lambda_n\alpha_{in}) = (\sum_{j=1}^n \lambda_j\alpha_{ij})$ não seja 0)



Corolário

Se um gerador de S tem m vetores, então todo subconjunto L.I. de S tem no máximo m vetores.

Corolários

Corolário

Se existe uma base de S com m vetores, toda base de S tem m vetores.

Corolários

Corolário

Se existe uma base de S com m vetores, toda base de S tem m vetores.

Demonstração.



Corolários

Corolário

Se as bases de S têm m vetores e $X \subset S$ tem m vetores, então X é base de $S \Leftrightarrow X$ é gerador de $S \Leftrightarrow X$ é L.I.

Corolários

Corolário

Se as bases de S têm m vetores e $X \subset S$ tem m vetores, então X é base de $S \Leftrightarrow X$ é gerador de $S \Leftrightarrow X$ é L.I.

Demonstração.



Dimensão de um espaço vetorial

Definicao

Seja V um espaço vetorial real finitamente gerado. A dimensão de V é a quantidade de vetores de uma base de V e denotamos por $\dim(V)$

Dimensão: exemplos

$$(i) \dim(\mathbb{R}) = 1$$

Dimensão: exemplos

- (i) $\dim(\mathbb{R}) = 1$
- (ii) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Dimensão: exemplos

- (i) $\dim(\mathbb{R}) = 1$
- (ii) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- (iii) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Dimensão: exemplos

- (i) $\dim(\mathbb{R}) = 1$
- (ii) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- (iii) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- (iv) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Dimensão: exemplos

- (i) $\dim(\mathbb{R}) = 1$
- (ii) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- (iii) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- (iv) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- (v) $\dim(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 7z = 0\}) = 2$

Bases: exemplos

$$(vi) \dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$$

Bases: exemplos

$$(vi) \dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$$

$$(vii) \dim(\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})) = m.n$$

Bases: exemplos

$$(vi) \dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$$

$$(vii) \dim(\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})) = m.n$$

$$(viii) \dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n + 1$$

Bases: exemplos

$$(vi) \dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$$

$$(vii) \dim(\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})) = m.n$$

$$(viii) \dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n + 1$$

$$(ix) \dim(\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : f'' + f = 0\}) = 2$$

Dimensão: propriedades

Lema

Sejam V um espaço vetorial real e $\{v_1, \dots, v_k\}$ um conjunto L.I. em V . Se $v \notin [v_1, \dots, v_k]$, então $\{v_1, \dots, v_k, v\}$ é L.I.

Dimensão: propriedades

Lema

Sejam V um espaço vetorial real e $\{v_1, \dots, v_k\}$ um conjunto L.I. em V . Se $v \notin [v_1, \dots, v_k]$, então $\{v_1, \dots, v_k, v\}$ é L.I.

Teorema

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n .

(i) Todo gerador X de V contém uma base de V ;

Dimensão: propriedades

Lema

Sejam V um espaço vetorial real e $\{v_1, \dots, v_k\}$ um conjunto L.I. em V . Se $v \notin [v_1, \dots, v_k]$, então $\{v_1, \dots, v_k, v\}$ é L.I.

Teorema

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n .

- (i) Todo gerador X de V contém uma base de V ;*
- (ii) Todo conjunto X L.I. está contido em uma base de V ;*

Dimensão: propriedades

Lema

Sejam V um espaço vetorial real e $\{v_1, \dots, v_k\}$ um conjunto L.I. em V . Se $v \notin [v_1, \dots, v_k]$, então $\{v_1, \dots, v_k, v\}$ é L.I.

Teorema

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n .

- (i) Todo gerador X de V contém uma base de V ;*
- (ii) Todo conjunto X L.I. está contido em uma base de V ;*
- (iii) Todo subespaço vetorial S de V tem dimensão menor ou igual a n ;*

Dimensão: propriedades

Lema

Sejam V um espaço vetorial real e $\{v_1, \dots, v_k\}$ um conjunto L.I. em V . Se $v \notin [v_1, \dots, v_k]$, então $\{v_1, \dots, v_k, v\}$ é L.I.

Teorema

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita n .

- (i) Todo gerador X de V contém uma base de V ;*
- (ii) Todo conjunto X L.I. está contido em uma base de V ;*
- (iii) Todo subespaço vetorial S de V tem dimensão menor ou igual a n ;*
- (iv) Se S é um subespaço vetorial de V com dimensão n , então $S = V$.*

Dimensão da soma de subespaços vetoriais

Proposição

Sejam V um espaço vetorial real e W_1, W_2 subespaços vetoriais de V de dimensão finita. Então $W_1 + W_2$ tem dimensão finita e

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Dimensão da soma de subespaços vetoriais

Proposição

Sejam V um espaço vetorial real e W_1, W_2 subespaços vetoriais de V de dimensão finita. Então $W_1 + W_2$ tem dimensão finita e

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Demonstração.



Dimensão da soma de subespaços vetoriais

Corolário

Se W_1 e W_2 são espaços vetoriais de dimensão finita, então $W_1 \oplus W_2$ tem dimensão finita e $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

Dimensão da soma de subespaços vetoriais

Corolário

Se W_1 e W_2 são espaços vetoriais de dimensão finita, então $W_1 \oplus W_2$ tem dimensão finita e $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

Demonstração.

