Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Prova Substitutiva

araujofpinto

2019/02/15

1. Sejam V e W espaços vetoriais reais de dimensões finitas $dim(V) = n$ e $dim(W) = m$ e uma transformação linear $T\colon V \to W$.
   (a) Enuncie o Teorema Núcleo-Imagem para T.
   (b) Demonstre o Teorema.
   (c) Mostre que, se $n = m$, então T é injetora se, e somente se, T for sobrejetora.
2. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $B_a = \{(a, 1, 0), (1, a, 0), (0, 1, a)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?
3. Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(a, b, c) = (a-b)+(c-a)x+(b+c)x^2$ é um isomorfismo.
4. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ munido do produto interno canônico, $\vec{n} = (1, 1, 1)$, $v_0 = (4, 1, -2)$ e $W = [\vec{n}]$.
   (a) Mostre que $W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \perp \vec{n}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 2.
   (b) Determine uma base ortogonal de $W^\perp$.
   (c) Determine $proj_W v_0$.
   (d) Determine o cosseno do ângulo θ entre v_0 e $\vec{n}$.
   (e) Mostre que $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 3\}$ é formado pelos vetores cuja projeção sobre W é $\vec{n}$, ou seja, mostre que $A = \{v \in \mathbb{R}^3 : proj_W v = \vec{n}\}$.
   (f) Mostre que A é um espaço afim de $\mathbb{R}^3$.
5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A = [T]_{can} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calcule $det(A)$.
   (b) Seja P um paralelogramo de $\mathbb{R}^2$ cuja área é 2. Qual a área do paralelogramo $T^4(P)$?
   (c) Determine o polinômio característico $p_T(\lambda)$.
   (d) Determine os 2 autovalores de T.
   (e) Determine os 2 autoespaços associados a cada autovalor encontrado.
   (f) Mostre que T é diagonalizável, isto é, determine uma base B de $\mathbb{R}^2$ para a qual $[T]_B$ seja uma matriz diagonal.
   (g) Determine a matriz A^4.
6. Faça uma avaliação do curso de verão de álgebra linear e de sua participação no curso.

Justifique todas as suas afirmações e boa prova!!!