Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Prova 3

araujofpinto

2019/02/14

1. Vamos determinar os 4 espaços fundamentais de uma transformação linear T. Sejam $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ e sua adjunta $T^*\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tais que $A = [T]_{can_3,can_5} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 8 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ e $[T^*]_{can_5,can_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 3 & -3 \\ 4 & 8 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = A^t$.

   (a) Determine $Núc(T) \subseteq \mathbb{R}^3$;
   (b) Determine $Im(T) \subseteq \mathbb{R}^5$;
   (c) Determine $Núc(T^*) \subseteq \mathbb{R}^5$;
   (d) Determine $Im(T*) \subseteq \mathbb{R}^3$;
   (e) Determine a nulidade de T, ou seja, determine a dimensão de $Núc(T)$;
   (f) Determine o posto de T, ou seja, determine a dimensão de $Im(T)$;
   (g) Determine a nulidade de T^*, ou seja, determine a dimensão de $Núc(T^*)$;
   (h) Determine o posto de T^*, ou seja, determine a dimensão de $Im(T^*)$;
   (i) Mostre que $Núc(T^*) = Im(T)^\perp$;
   (j) Mostre que $Im(T^*) = Núc(T)^\perp$;
   (k) Determine uma base ortonormal para $Núc(T)$;
   (l) Determine uma base ortonormal para $Im(T)$;
   (m) Determine uma base ortonormal para $Núc(T^*)$;
   (n) Determine uma base ortonormal para $Im(T^*)$.

2. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ munido do produto interno canônico e de uma forma bilinear alternada que mede as áreas com sinais dos paralelogramos de V, sendo que a área do quadrado unitário gerado por $(1,0)$ e $(0,1)$ é igual a 1. Sejam $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (8,6)$ em V.

   (a) Calcule a área do paralelogramo P gerado por v_1 e v_2.
   (b) Seja $T\colon V \to V$ dada por $T(x,y) = (3x+y, 2x+2y)$. Calcule a área do paralelogramo $T(P)$ gerado por $T(v_1)$ e $T(v_2)$.
   (c) Calcule a área do paralelogramo $T^{-1}(P)$ gerado por $T^{-1}(v_1)$ e $T^{-1}(v_2)$.
   (d) Aplicando o processo de Gram-Schmidt, obtemos uma base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ de V dada por $w_1 = v_1$ e $w_2 = v_2 - proj_{v_1}v_2$. Determine w_1 e w_2.
   (e) Mostre que $||w_1||.||w_2||$ é igual à área de P.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A = [T]_{can} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Determine o polinômio característico $p_T(\lambda)$.

   (b) Determine os autovalores de T.

   (c) Determine os autoespaços associados a cada autovalor encontrado.

   (d) Mostre que T é diagonalizável, isto é, determine uma base B de $\mathbb{R}^2$ para a qual $[T]_B$ seja uma matriz diagonal.

   (e) Mostre que A é diagonalizável, isto é, determine matrizes D, N e N^{-1} tais que $A = N.D.N^{-1}$.

   (f) Determine a matriz A^5.

   (g) Calcule os determinantes de D, N e N^{-1}.

4. Quais são, em sua visão, os principais temas presentes neste curso de àlgebra linear? Escreva sobre um deles, destacando suas reflexões acerca deste tema durante o curso.

Justifique todas as suas afirmações e boa prova!!!