Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Prova 2

araujofpinto

2019/02/04

1. **(a)** ($\Rightarrow$) Se T é isomorfismo, então T é bijetora, logo T é injetora.

   ($\Leftarrow$) Se T é injetora, então $Núc(T) = \{0_V\}$, de onde $dim(Núc(T)) = 0$. Logo, pelo Teorema do Núcleo-imagem, temos que $dim(Im(T)) = n - dim(Núc(T)) = n - 0 = n$ e, portanto, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de dimensão n contido em W, que também tem dimensão n, de onde $Im(T) = W$. Logo, T é sobrejetora e, portanto, bijetora, sendo assim um isomorfismo.

   (b) ($\Rightarrow$) Se T é isomorfismo, então T é bijetora, logo T é sobrejetora.

   ($\Leftarrow$) Se T é sobrejetora, então $Im(T) = W$, de onde $dim(Im(T)) = n$. Logo, pelo Teorema do Núcleo-imagem, temos que $dim(Núc(T)) = n - dim(Im(T)) = n - n = 0$ e, portanto, $Núc(T)$ é um subespaço vetorial de dimensão 0 contido em V, de onde $Núc(T) = \{0_V\}$. Logo, T é injetora e, portanto, bijetora, sendo assim um isomorfismo.

2. (ANPEC 2009) Se A é a matriz na base canônica de $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$, julgue as afirmativas (como verdadeiro ou falso, e justifique):

   (a) (FALSO) O núcleo de T é a solução do sistema linear homogêneo 3×3 : $\begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$ que é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade, já que $Núc(T) = [(1, 1, 0)]$ e, portanto, $dim(Núc(T)) = 1$.

   (b) (VERDADEIRO) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e, portanto, as colunas de A formam um conjunto gerador da imagem de T, isto é, $\{(0, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ é um gerador de $Im(T)$ e, portanto, $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ é base de $Im(T)$, pois é linearmente independente.

   (c) (VERDADEIRO) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (d) (FALSO) $e_3 = (0, 0, 1) \in U$ e $T(e_3) = (1, 0, -1) \notin U$.

   (e) (VERDADEIRO) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 1, 0)\}$ é solução do sistema linear 3×3 dado por $\begin{cases} z = 0 \\ x - y = 1 \\ -z = 0 \end{cases}$ que corresponde a $z = 0$ e $y = x - 1$, que gera a reta $r = \{(t, 1 - t, 0), t \in \mathbb{R}\}$ contida no plano $z = 0$ (plano xy).

3. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x + y, 2x + 2y)$.

   (a) **(i)** $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)) = (3x_1 + 3x_2 + y_1 + y_2, 2x_1 + 2x_2 + 2y_1 + 2y_2) = (3x_1 + y_1, 2x_1 + 2y_1) + (3x_2 + y_2, 2x_2 + 2y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$

(ii) $T(\lambda(x,y)) = T(\lambda x, \lambda y) = (3(\lambda x) + (\lambda y), 2(\lambda x) + 2(\lambda y)) = \lambda(3x + y, 2x + 2y) = \lambda T(x,y)$
Portanto, T é linear.

(b) $A = [T]_{can_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Vamos calcular o núcleo de T: se $v = (x,y) \in Núc(T)$, então temos o sistema linear homogêneo 2×2 $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ que pode ser escalonado como em $\begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & | & 0 \end{pmatrix}$ e, portanto o sistema é possível e determinado com única solução dada por $x = 0$ e $y = 0$. Portanto, o núcleo de T é o conjunto unitário $\{(0,0)\}$, de onde T é injetora. Como as dimensão do domínio de T e do contradomínio de T são iguais, temos que T ser injetora implica em T ser isomorfismo.

Para calcular T^{-1}, temos 2 caminhos:

(I) Resolver o sistema $T(x,y) = (a,b)$ na incógnita (x,y) em função de (a,b): $\begin{cases} 3x + y = a \\ 2x + 2y = b \end{cases} \to$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & | & a \\ 2 & 2 & | & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & a \\ 0 & \frac{4}{3} & | & b - \frac{2}{3}a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & | & \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}b \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b \end{pmatrix}$.

Logo $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b$ e $y = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b$, ou seja, $T^{-1}(a,b) = (x,y) = (\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b, -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b$, ou ainda $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}. \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

(II) Inverter a matriz A:
$\begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & | & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & | & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \to$
$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Logo $T^{-1}(a,b) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}. \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b \\ -\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b \end{pmatrix}$.

(d) Se $v = (x,y)$ tal que $T(v) = 4v$, então temos o sistema linear homogêneo 2×2 dado por $\begin{cases} 3x + y = 4x \\ 2x + 2y = 4y \end{cases} \to \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ cuja solução geral é dada por $v = (t,t)$. Como queremos que v seja unitário, temos $||v|| = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2t^2} = \sqrt{2}|t| = 1$, ou seja, $|t| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (ou $v = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$).

(e) Se $w = (x,y)$ tal que $T(w) = w$, então temos o sistema linear homogêneo 2×2 dado por $\begin{cases} 3x + y = x \\ 2x + 2y = y \end{cases} \to \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ cuja solução geral é dada por $w = (s, -2s)$. Como queremos que w seja unitário, temos $||w|| = \sqrt{s^2 + (2s)^2} = \sqrt{5s^2} = \sqrt{5}|s| = 1$, ou seja, $|s| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $w = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ (ou $w = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$).

(f) Para mostrarmos que $B = \{v, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, basta mostrarmos que B é linearmente independente, uma vez que B tem 2 elementos e $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
Se $\alpha v + \beta w = (0,0)$, então $\alpha(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) + \beta(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = (0,0)$, gerando o sistema linear homogêneo 2×2 $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha + \beta\frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{2}{\sqrt{2}}\beta = 0 \end{cases}$ que tem como solução única $\alpha = \beta = 0$.
Logo, B é linearmente independente e, portanto, B é base de $\mathbb{R}^2$..

(g) $M = [Id]_{B,can_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, pois $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_{can_2}$ e $w = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0) - \frac{2}{\sqrt{5}}(0,1) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})_{can_2}$

$N = [Id]_{can_2,B} = M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$ pois $(1,0) = \frac{2\sqrt{2}}{3}v + \frac{\sqrt{5}}{3}w = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})_B$ e $(0,1) = \frac{\sqrt{2}}{3}v - \frac{\sqrt{5}}{3}w = (\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3})_B$

(h) $T(v) = T(1,0)_B = 4v = 4v + 0w = (4,0)_B$ e $T(w) = T(0,1)_B = w = 0v + w = (0,1)_B$.

Logo, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [T]_B$.

Note que $A = M.D.N = N^{-1}.D.N$, ou $D = N.A.M = M^{-1}.A.M$.

(i) $\cos\theta = \frac{\langle v,w\rangle}{||v||.||w||} = \frac{\langle(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})\rangle}{1.1} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

(j) $\langle w - \lambda v, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle w,v\rangle - \lambda\langle v,v\rangle = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle} = \frac{\langle(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})\rangle}{1} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

4. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (2x, x-y, y)$ e $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y,z) = (y-z, z-x)$.

(a) $P \circ T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dada por $(P \circ T)(x,y) = P(T(x,y)) = P(2x, x-y, y) = (x-y-y, y-2x) = (x-2y, -2x+y)$.

(b) Como $(P \circ T)(x,y) = (x-2y, -2x+y) = (a,b)$, temos $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ -2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou seja, $[P \circ T]_{can_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Resolvendo o sistema linear homogêneo $(P \circ T)(x,y) = (x-2y, -2x+y) = (0,0)$, obtemos $y = 0$ e $x = 0$. Logo, $Núc(P \circ T) = \{(0,0)\}$, o conjunto vazio $\emptyset$ é uma base do núcleo de $P \circ T$ e a nulidade é $dim(Núc(P \circ T)) = 0$.

(d) Pelo Teorema Núcleo-Imagem, se a nulidade é $d = 0$, então o posto r de $(P \circ T)$ é dado por $r = n - d = 2 - 0 = 2$, Portanto, a Imagem de $P \circ T$ é um subespaço vetorial de dimensão 2 contido no $\mathbb{R}^2$, isto é, $Im(P \circ T) = \mathbb{R}^2$, o posto r de $P \circ T$ é igual a 2 e duas possíveis bases para $Im(P \circ T)$ são a base canônica $\{(1,0),(0,1)\}$ ou a base $\{(1,-2),(-2,1)\}$ formada pelas colunas da matriz do ítem (b).

(e) $P \circ T$ é um isomorfismo, pois é injetora $d = 0$ e sobrejetora $r = n$.

(f) $T \circ P \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $(T \circ P)(x,y,z) = T(P(x,y,z)) = T(y-z, z-x) = (2(y-z), y-z-(z-x), z-x) = (2y-2z, x+y-2z, -x+z)$.

(g) Como $(T \circ P)(x,y,z) = (2y-2z, x+y-2z, -x+z) = (a,b,c)$, temos $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-2z \\ x+y-2z \\ -x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ou seja, $[T \circ P]_{can_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(h) Resolvendo o sistema linear homogêneo $(T \circ P)(x,y,z) = (2y-2z, x+y-2z, -x+z) = (0,0,0)$, obtemos $\begin{cases} 2y-2z = 0 \\ x+y-2z = 0 \\ -x+z = 0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ que é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade (1 coluna sem pivô) cuja solução é dada por $x = y = z$.

Logo, $Núc(T \circ P) = [(1,1,1)]$, o conjunto unitário $\{(1,1,1)\}$ é uma base do núcleo de e a nulidade de $T \circ P$ é $dim(Núc(T \circ P)) = 1$.

(i) Pelo Teorema Núcleo-Imagem, se a nulidade é $d = 1$, então o posto r de $(T \circ P)$ é dado por $r = n - d = 3 - 1 = 2$, Portanto, a Imagem de $T \circ P$ é um subespaço vetorial de dimensão 2 contido no $\mathbb{R}^3$. Lembrando que as colunas da matriz $[T \circ P]_{can_3}$ são um conjunto gerador da imagem de $T \circ P$ e notando que a terceira coluna c_3 é combinação linear ($c_3 = -c_2 - c_1$) das duas primeiras colunas (que são linearmente independentes), temos que uma possível base para $Im(T \circ P)$ é $\{(0,1,-1),(2,1,0)\}$.

(j) $T \circ P$ não é um isomorfismo, pois não é injetora ($d = 1 > 0$) e nem sobrejetora ($r = 2 < 3$).

5. **(a)** Para mostrarmos que $B = \{r_1, r_2\}$ é uma base de V, basta mostrarmos que B é linearmente independente, uma vez que B tem 2 elementos e $dim(V) = 2$.

Se $\alpha r_1 + \beta r_2 = 0_V$, então $(\alpha + \beta)x + (-\alpha - 2\beta) = 0x + 0$, gerando o sistema linear homogêneo $2 \times 2 \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$ que tem como solução única $\alpha = \beta = 0$.

Logo, B é linearmente independente e, portanto, B é base de V.

(b) $T(r_1) = (3,4) = 1.(3,4) + 0(-4,3) = (1,0)_C$ e $T(r_2) = (-4,3) = 0.(3,4) + 1(-4,3) = (0,1)_C$

Logo, a coluna 1 da matriz é $(1,0)$ e a coluna 2 da matriz é $(0,1)$, ou seja $[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

(c) $T(r_1) = (3,4) = 3.(1,0) + 4(0,1) = (3,4)_{can_2}$ e $T(r_2) = (-4,3) = -4.(1,0) + 3(0,1) = (-4,3)_{can_2}$

Logo, a coluna 1 da matriz é $(3,4)$ e a coluna 2 da matriz é $(-4,3)$, ou seja $[T]_{B,can_2} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) $[T(r)]_C = [T]_{B,C}[r]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_C$

$[T(r)]_{can_2} = [T]_{B,can_2}[r]_B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}_{can_2}$

(e) **(i) Bilinear:** $\langle p + r, q \rangle = (p + r)(1).q(1) + (p + r)(2).q(2) = p(1).q(1) + r(1).q(1) + p(2).q(2) + r(2).q(2) = \langle p, q \rangle + \langle r, q \rangle$

$\langle \alpha p, q \rangle = (\alpha p)(1).q(1) + (\alpha p)(2).q(2) = \alpha p(1).q(1) + \alpha p(2).q(2) = \alpha \langle p, q \rangle$

(ii) Simétrica: $\langle p, q \rangle = p(1).q(1) + p(2).q(2) = q(1).p(1) + q(2).p(2) = \langle q, p \rangle$

(iii) Positiva definida: $\langle p, p \rangle = p(1).p(1) + p(2).p(2) = [p(1)]^2 + [p(2)]^2 \geq 0$ $\langle p, p \rangle = [p(1)]^2 + [p(2)]^2 = 0 \Rightarrow p(1) = p(2) = 0 \Rightarrow p(x) = ar_1(x) + br_2(x)$ com $p(1) = ar_1(1) + br_2(1) = -b = 0$ e $p(2) = ar_1(2) + br_2(2) = a = 0$ e, portanto, $p = 0_V$.

(f) Vamos mostrar que $r_1 \perp r_2$ e que $||r_1|| = ||r_2|| = 1$:

$\langle r_1, r_2 \rangle = r_1(1).r_2(1) + r_1(2).r_2(2) = (1-1)(1-2) + (2-1)(2-2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow r_1 \perp r_2$

$||r_1|| = \sqrt{\langle r_1, r_1 \rangle} = \sqrt{r_1(1).r_1(1) + r_1(2).r_1(2)} = \sqrt{(1-1)(1-1) + (2-1)(2-1)} = \sqrt{0+1} = 1 \Rightarrow ||r_1|| = 1$.

$||r_2|| = \sqrt{\langle r_2, r_2 \rangle} = \sqrt{r_2(1).r_2(1) + r_2(2).r_2(2)} = \sqrt{(1-2)(1-2) + (2-2)(2-2)} = \sqrt{1+0} = 1 \Rightarrow ||r_2|| = 1$.

Portanto, B é ortonormal em relação a este produto interno.