Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Prova 2

araujofpinto

2019/02/04

1. Sejam V e W espaços vetoriais reais de mesma dimensão finita $dim(V) = dim(W) = n$ e $T \colon V \to W$ linear. Usando o Teorema Núcleo-Imagem:

   (a) Mostre que T é um isomorfismo se, e somente se, T é injetora.

   (b) Mostre que T é um isomorfismo se, e somente se, T é sobrejetora.

2. (ANPEC 2009) Se A é a matriz na base canônica de $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$, julgue as afirmativas (como verdadeiro ou falso, e justifique):

   (a) A dimensão do núcleo de T é 2.

   (b) $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ é uma base da imagem de T.

   (c) A transposta de A é $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (d) Se $U = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, então $T(U) \subseteq U$.

   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 1, 0)\}$ é uma reta no plano xy.

3. Seja $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x + y, 2x + 2y)$.

   (a) Mostre que T é linear.

   (b) Determine a matriz A associada a T na base canônica, ou seja, determine $A = [T]_{can_2}$.

   (c) Mostre que T é um isomorfismo e determine T^{-1}.

   (d) Determine um vetor unitário v tal que $T(v) = 4v$.

   (e) Determine um vetor unitário w tal que $T(w) = w$.

   (f) Mostre que $B = \{v, w\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

   (g) Seja $I_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação Identidade em $\mathbb{R}^2$ (isto é, dada por $I_2(v) = v$). Determine as matrizes M e N associadas a I_2 da base B para a base canônica can_2 e da base canônica can_2 para a base B, isto é, determine $M = [Id]_{B,can_2}$ e $N = [Id]_{can_2,B}$.

   (h) Determine a matriz D associada a T na base B, ou seja, determine $D = [T]_B$.

   (i) Considerando em $\mathbb{R}^2$ o produto interno canônico, calcule o cosseno do ângulo θ entre v e w.

   (j) Considerando em $\mathbb{R}^2$ o produto interno canônico, determine um número real λ tal que $\langle w - \lambda v, v\rangle = 0$, isto é, tal que $w - \lambda v \perp v$. Obs.: λv é conhecido como a projeção ortogonal de w na direção de v.

4. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x, x - y, y)$ e $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $P(x, y, z) = (y - z, z - x)$.

   (a) Determine $P \circ T$,

   (b) Determine a matriz de $P \circ T$ nas bases canônicas.

   (c) Determine uma base para $Núc(P \circ T)$ e a nulidade de $P \circ T$.

   (d) Determine uma base para $Im(P \circ T)$ e o posto de $P \circ T$.

   (e) $P \circ T$ é um isomorfismo?

   (f) Determine $T \circ P$.

   (g) Determine a matriz de $T \circ P$ nas bases canônicas.

   (h) Determine uma base para $Núc(T \circ P)$ e a nulidade de $T \circ P$.

   (i) Determine uma base para $Im(T \circ P)$ e o posto de $T \circ P$.

   (j) $T \circ P$ é um isomorfismo?

5. Seja $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

   (a) Sejam r_1 e r_2 em V dados por $r_1(x) = x - 1$ e $r_2(x) = x - 2$. Mostre que $B = \{r_1, r_2\}$ é uma base de V.

   (b) Sejam $C = \{(3, 4), (-4, 3)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $T \colon V \to \mathbb{R}^2$ linear dada por $T(r_1) = (3, 4)$ e $T(r_2) = (-4, 3)$. Determine a matriz associada a T em relação às bases B e C, isto é, determine $[T]_{B,C}$.

   (c) Determine a matriz associada a T em relação às bases B e $can_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, isto é, determine $[T]_{B,can_2}$.

   (d) Seja $r \in V$ cujas coordenadas na base B são dadas por $[r]_B = (2, -1)_B$. Determine $T(r)$ em coordenadas na base C e determine $T(r)$ em coordenadas na base canônica can_2, isto é, determine $[T(r)]_C$ e $[T(r)]_{can_2}$.

   (e) Mostre que $\langle p, q\rangle = p(1).q(1) + p(2).q(2)$ define um produto interno em V.

   (f) B é ortonormal em relação ao produto interno do ítem anterior?

Justifique todas as suas afirmações e boa prova!!!