Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Prova 1

araujofpinto

2019/01/21

1. Sejam V e W espaços vetoriais reais. Mostre que o conjunto $V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$ munido com as operações $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ e $\alpha.(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$ é um espaço vetorial real.

2. **(a)** Mostre que $S = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
   (b) Mostre que $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0, -x + 2y + z - t = 0\}$ é um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^4$.
   (c) Seja V um espaço vetorial real e U e W subespaços vetoriais de V. Mostre que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$
   (a) Mostre que $\mathcal{B}_0 = \{(2, 1), (-1, 2)\}$ é base de V.
   (b) Escreva $(3, -1)_{\mathcal{B}_0}$ em coordenadas da base canônica $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
   (c) Escreva os vetores da base canônica em coordenadas na base $\mathcal{B}_0$, isto é, encontre $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ em $\mathbb{R}$ tais que $(1, 0) = (\alpha_1, \beta_1)_{\mathcal{B}_0}$ e $(0, 1) = (\alpha_2, \beta_2)_{\mathcal{B}_0}$.
   (d) Encontre as coordenadas de um vetor (x, y) qualquer em $\mathbb{R}^2$, isto é, encontre α, β em $\mathbb{R}$ tais que $(x, y) = (\alpha, \beta)_{\mathcal{B}_0}$.
   (e) Sejam a, b números reais diferentes de 0. Prove que $\mathcal{B} = \{(a, b), (-b, a)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

4. Seja $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ o plano que passa por $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
   (a) Determine uma equação do plano π.
   (b) Mostre que π é um espaço afim.
   (c) Seja H o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ paralelo a π. Determine uma base $\mathcal{B}$ de H. Qual a dimensão de H?
   (d) Encontre um subespaço vetorial W de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = H \oplus W$

5. Dados um espaço vetorial real V e um subconjunto U de V, decida se U é linearmente independente em V. No caso de U ser linearmente dependente, determine uma base do subespaço vetorial S de V gerado por U:
   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 2, -5), (1, 2, 3)\}$,
   (b) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $U = \{1, \sin x, \cos x\}$;

6. Sejam U e W subespaços vetoriais de dimensão 3 em $\mathbb{R}^4$. Considerando que $U \cap W = [(1, 2, 1, 0), (2, 1, 0, -1), (1, 5, 3, 1)]$, determine o subespaço $U + W$?

7. Dados um espaço vetorial real V e um subconjunto $\mathcal{B}_a$ de V, decida para quais valores de a em $\mathbb{R}$, temos que $\mathcal{B}_a$ é base de V:
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_a = \{(a, 1, 0), (1, a, 0), (0, 1, a)\}$
   (b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{B}_a = \{1, x - a, (x - a)^2\}$.

8. Sejam $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $U = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \text{ } em \text{ } \mathbb{R}\}$ e $W = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}, d \in \mathbb{R}\}$
   Considere as seguintes matrizes em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Mostre que $\mathcal{B}_U = \{A_1, A_2, A_3\}$ é base de U. Qual a dimensão de U?
   (b) Mostre que $\mathcal{B}_W = \{A_4\}$ é base de W. Qual a dimensão de W?
   (c) Mostre que $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é base de V.
   (d) Mostre que $V = U \oplus W$.

Justifique todas as suas afirmações e boa prova!!!