Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Lista 4

araujofpinto

fevereiro 2019

1. Sejam V um espaço vetorial real e $T : V \to V$ uma transformação linear, $v \in V$ um autovetor de T associado ao autovalor λ. Mostre que, para quaisquer α, β em $\mathbb{R}$, vale que v é autovetor de $\alpha T + \beta I_V$ associado ao autovalor $\alpha\lambda + \beta$.

2. Sejam V um espaço vetorial real e $T : V \to V$ uma transformação linear. Mostre que $\lambda = 0$ é autovalor de T se, e somente se, T não é injetora.

3. Sejam V um espaço vetorial real e $T : V \to V$ uma transformação linear, $v \in V$ um autovetor de T associado ao autovalor λ. Considere a transformação linear $T^n : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, definida por $T^n(v) = (T \circ T \circ \ldots \circ T)(v)$, para todo $v \in V$. Mostre que v é um autovetor de T^n associado ao autovalor λ^n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

4. Sejam V um espaço vetorial real e $T : V \to V$ um isomorfismo, $v \in V$ um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda \neq 0$. Mostre que v é um autovetor de T^{-1} associado ao autovalor $\frac{1}{\lambda}$.

5. Sejam V um espaço vetorial real e $T : V \to V$ um isomorfismo. Dizemos que T é **nilpotente**, se existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(v) = 0_V$, para todo $v \in V$. Nessas condições mostre que o único autovalor de T é $\lambda = 0$.

6. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que satisfaça as duas seguintes propriedades simultaneamente:
   a) $\lambda = 1$ é um autovalor de T associado aos autovetores da forma $v_1 = (y, -y)$, onde $y \neq 0$.
   b) $\lambda = 3$ é um autovalor de T associado aos autovetores da forma $v_1 = (0, y)$, onde $y \neq 0$.

7. Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, matrizes semelhantes. Mostre que se A é invertível, então B é invertível e vale que A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.

8. Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, matrizes semelhantes. Estabeleça a relação entre os autovalores e autovetores de A e B.

9. Sejam $\mathbb{R}^4$ com produto interno usual, $W = [(1, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, 1)]$ e $P : V \to V$ é a projeção ortogonal sobre W. Determine os autovalores e autovetores de P.

10. Determine os autovalores e autovetores da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determine os autovalores e os autovetores de T.

12. Determine os autovalores e os autovetores de Te T^{-1}, onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação linear tal que $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Determine os autovalores e os autovetores de T, R e S, onde $T, R, S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ são transformações lineares tais que
$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, [R]_{can} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} [S]_{can} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $U = [v_1, v_3]$. Sabendo que $T(v) = v$, para todo $v \in U$ e que $T(v_2) = v_1 + 2v_2 + 3v_3$, determine os autovalores e autovetores de T.

15. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine a multiplicidade algébrica e geométrica dos autovalores de T.

16. Verifique se a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (-3x - 4y, 2x + 3y, -z)$ é diagonalizável.

17. Verifique se a transformação $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dada por $T(a + bx + cx^2) = (2b + c) + (2b - c)x + 2cx^2$ é diagonalizável.

18. Sejam V um espaço vetorial real tal que $dim(V) = n$ e $T : V \to V$ uma transformação linear que possui somente dois autovalores λ_1, λ_2, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $dim(V_{\lambda_1}) = (n - 1)$. Prove que T é diagonalizável.

19. Dê um exemplo de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalizável tal que $Ker(T) = [(1, 0, 1)]$.

20. Dê um exemplo de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalizável tal que $Im(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)]$.

21. Dê um exemplo de um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ diagonalizável tal que $Ker(T) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0, z - t = 0\}$, $\lambda = -3$ é autovalor de T, $T((0, 0, 1, 0)) = (0, 0, 2, 0)$ e $(0, 1, 0, 0) \in Im(T)$.

22. Determine um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ diagonalizável tal que $Ker(T) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0, z - t = 0\}$, $\lambda = 2$ é autovalor de T, com a multiplicidade algébrica igual à 2 e $Im(T) = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)]$.

23. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por

$$T(a + bx + cx^2) = -a + (a - b)x + 3cx^2.$$

   a) Determine os autovalores e autovetores de T.

   b) Vale que T é diagonalizável? Justifique a sua resposta!

24. Considere $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios de grau 1. Seja $B = \{-x, 1-x\}$ base de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Seja $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ uma transformação linear, tal que sua representação matricial em relação à base B é

$$[T]_{B,B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Mostre que para todo $a + bx \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ temos $T(a + bx) = a - (2a + b)x$.

   b) Mostre que para todo $a + bx \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ temos $T^{-1}(a + bx) = a - (2a + b)x$.

   c) Vale que T é um isomorfismo? Justifique!

   d) Vale que T é diagonalizável? Quais são os autovalores de T? Vale que $-x$, e $1 - x$ são autovetores de T? Justifique!

25. Usando o método dos mínimos quadrados, ajuste os dados $\begin{pmatrix} x & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ y & | & 0.5 & 0.9 & 1.6 & 2 & 2.4 \end{pmatrix}$

   (a) por uma reta.

   (b) por uma parábola.

   (c) por uma função da forma $f(x) = \alpha + \beta \sin x + \gamma \cos x$.

26. Encontre a solução geral das seguintes equações diferenciais ordinárias (EDOs):

   (a) $x' = x$

   (b) $x' - x = 2$

   (c) $x' - x = t^2$

   (d) $x'' = -x$

   (e) $x'' + x = \sin 2t$

   (f) $x'' + 3x' + 2x = 5$

   (g) $x'' + 3x' + 2x = 5e^{2t}$

   (h) $x'' - 3x' + 5x = 2e^t - 3$

   (i) $x'' - 3x' + 2x = 3e^{2t}$

   (j) $x'' - 4x' + 3x = te^{3t}$

   (k) $x'' - 3x' = t^2$