Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Lista 3

araujofpinto

janeiro 2019

1. Para cada espaço vetorial real V, decida se a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ define um produto interno em V:

   (a) $V = \mathbb{R}^2$ e $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - y_1x_2 + 4x_2y_2$;

   (b) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e $\langle A, B \rangle = tr(B^T A)$;

   (c) $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\langle A, B \rangle = tr(B^T A)$;

   (d) $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$;

   (e) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$;

   (f) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t).q(t)dt$;

2. Sejam V um espaço vetorial real, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ dois produtos internos em V.

   (a) Mostre que a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_1 + \langle u, v \rangle_2$ define um produto interno em V.

   (b) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $\langle u, v \rangle = a\langle u, v \rangle_1$ define um produto interno em V?

3. Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e seja $T : V \to V$ uma transformação linear.

   (a) Mostre que, se T for um isomorfismo, então $f : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \langle T(u), T(v) \rangle$ define um produto interno em V

   (b) Mostre que, se valer $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, para todo u, v em V, então T é injetora. Se, além disso, valer que V tem dimensão finita, então $T : V \to V$ é um isomorfismo.

4. Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno e $u, v \in V$. Prove as seguintes afirmações:

   (a)(Teorema de Pitágoras) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow u \perp v$.

   (b)(Polarização) $\frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) = \langle u, v \rangle$.

   (c)(Lei do paralelogramo) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$.

   (d)(Diagonal do paralelogramo) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre os vetores não-nulos u e v.

   (e)(Lei dos cossenos) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre os vetores não-nulos u e v.

   (f) $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow u + v \perp u - v$

   (g) $\{u, v\}$ é L.D. $\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| = \|u\|\|v\|$.

5. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, prove os resultados abaixo:

   (a) $(a \cos\theta + b \sin\theta)^2 \leq a^2 + b^2$, para quaisquer a, b, θ em $\mathbb{R}$;

   (b) $(a_1 + a_2 + a_3)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}) \geq 9$, para quaisquer a_1, a_2, a_3 em $\mathbb{R}_+^*$;

   (c) $(\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n})^2 \leq \frac{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2}{n}$, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{R}$;

   (d) $(\sum_{j=1}^n a_jx_jy_j)^2 \leq (\sum_{j=1}^n a_jx_j^2)(\sum_{j=1}^n a_jy_j^2)$, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}_+$ e quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ em $\mathbb{R}$

   (e) $(\sum_{j=1}^n a_jx_jy_j)^2 \leq (\sum_{j=1}^n a_j^{2p}x_j^2)(\sum_{j=1}^n a_j^{2(1-p)}y_j^2)$, para qualquer p em $]0, 1[$, quaisquer $a_1, \ldots, a_n$ em $\mathbb{R}_+$ e quaisquer $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ em $\mathbb{R}$.

6. Faça o que se pede acerca da estrutura geométrica dos espaços vetoriais com produto interno abaixo:

   (a) Considere $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ com o produto interno usual. Seja $x = (1,1)$ e $y = (3,-1)$, encontre um vetor $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\langle x, z\rangle = -2$ e $\langle y, z\rangle = 1$.

   (b) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Verifique qu o conjunto $B = \{(1,1,1),(1,2,-3),(5,-4,-1)\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas do vetor $(1,5,-7)$ em relação a essa base, ou seja, determine a, b e c em $\mathbb{R}$ tais que $(1,5,-7) = (a,b,c)_B$.

   (c) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Dados $u = (1,1,1)$ e $v = (2,-1,1)$, determine w_1 e w_2 tais que $u = w_1 + w_2$, $w_1 \perp u$ e $\{v, w_2\}$ seja LI.

   (d) Considerando $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, sejam $u = (3, 2-1, 0)$ e $v = (1,2,0,1)$. Determine $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$ e o coseno do ângulo entre u e v.

   (e) Considerando $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno usual, $\langle A, B\rangle = tr(B^t A)$, para todo $A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determine $\langle A, B\rangle$, $\langle A+B, C\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ e o coseno do ângulo entre A e B.

   (f) Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço vetorial com produto interno e sejam $u, v \in V$ tais que $\|u\| = 4$ e $\|v\| = 1$ e $\|u - v\| = 5$. Determine $\langle u, v\rangle$.

7. Dados V um espaço vetorial real com um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e um subespaço S de V, encontre uma base ortonormal de S e uma base ortonormal de $S^\perp$:

   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$.

   (b) $V = \mathbb{R}^4$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^4$ e $S = [(0,1,-2,1)]$.

   (c) $V = \mathbb{R}^4$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^4$ e $S = [(1,1,1,1),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)]$.

   (d) $V = \mathbb{R}^5$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^5$ e $S = [(1,2,3,-1,2),(2,1,0,2,-1)]$.

   (e) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e $S = N\acute{u}c(T)$, onde $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T((x,y,z)) = (x - y - z, 2z - x)$.

   (f) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e $S = Im(T)$, onde $T : V \to V$ é dada por $T((x,y,z)) = (x - y - z, -x + y + 2z, x - y)$.

   (g) $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = tr(B^T A)$ e $S = [\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}]$.

   (h) $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = tr(B^T A)$ e $S = [\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}]$.

   (i) $V = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$ e $S = [p_0]$, onde $p_0(x) = 1 + x$

   (j) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ e $S = [p_0]$, onde $p_0(x) = 2 - x$

8. Seam $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, $S = [(1,1,1)]$, $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre S. Determine $P(x,y,z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

9. Seja $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $u = P(v)$ é a projeção ortogonal de $v \in \mathbb{R}^3$ no plano $3x + 2y + z = 0$. Determine $P(x,y,z), Im(P)$ e $Ker(P)$.

10. Seja $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c\rangle = 0\}$, para $c \in \mathbb{R}^n$ fixo.

    (a) Determine $W^\perp$.

    (b) Dado $u \in \mathbb{R}^n$, determine a projeção de u sobre W e a projeção de u sobre $W^\perp$.

11. Em $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual seja $S = \{(1,1,1,1),(-1,1,-1,1)\}$. Encontre a melhor approximação de $(2,1,3,1)$ em S.

12. Sejam $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$. Determine os vetores dos subespaços S e $S^\perp$ que melhor approximam o vetor $(1,2,1)$.

13. Sejam $B \in \mathbb{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $A \in \mathbb{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $(BA)^T = A^T B^T$.

14. Sejam A e B em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

    (a) Mostre que A é inversível se, e somente se, $det(A) \neq 0$.

    (b) Mostre que $det(BA) = det(B)det(A)$

    (c) Mostre que, se A é inversível, então $det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$;

    (d) Mostre que, se A e B são inversíveis, então BA é inversível e $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$;

    (e) Mostre que $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$

    (f) Mostre que $det(A^T) = det(A)$

    (g) Mostre que A é inversível se, e somente se, $A^T A$ é inversível

    (h) Mostre que A^T é inversível se, e somente se, A é inversível e, neste caso, mostre que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

    (i) Se A e B são triangulares superiores, então BA é triangular superior;

    (j) Se $A = (a_{ij})$ é triangular superior, então $det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}$ é triangular superior;

    (k) Mostre que $A^T A$ é simétrica

    (l) Mostre que existem matrizes C_1 e C_2 em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tais que $A = C_1 + C_2$ com C_1 matriz simétrica e C_2 matriz antissimétrica.

15. Se $det\colon \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função multilinear alternada nas colunas de uma matriz 2×2 com $det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, mostre que $det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

16. Se $det\colon \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função multilinear alternada nas colunas de uma matriz $n \times n$ com $det(I_n) = 1$, onde I_n é a matriz Identidade de ordem n. Deduza a fórmula de $det(A)$ para $A = (a_{ij})$ uma matriz qualquer em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

17. Dadas A e B em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, dizemos que A e B são semelhantes se existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ com $det(P) \neq 0$ tal que $A = P^{-1}BP$. Mostre que, se A e B são semelhantes, então $det(A) = det(B)$.

18. Exiba todas as $n!$ permutações do S_n como produto de permutações cíclicas e como produtos de transposições, calculando o sinal e a paridade de cada uma delas para $n = 2$,$n = 3$ e $n = 4$.

19. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ com $\lambda_1 = ||v_1||, \lambda_2 = ||v_2||, \dots, \lambda_n = ||v_n||$ e a matriz A formada pelos vetores de $\mathcal{B}$ em suas colunas. Calcule $|det(A)|$ em função de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Qual o módulo do determinante de A se $\mathcal{B}$ for ortonormal?

20. Mostre que $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ leva o círculo unitário $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ na elipse $\{(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\}$. Calcule a área dessa elipse usando $det(A)$.

21. **(a)** Qual a área do paralelogramo com 3 de seus vértices em $(0,0), (a,b)$ e (c,d)? Onde se encontra o outro vértice?

    (b) Qual o volume do paralelepípedo com 4 de seus vértices em $(0,0,0), (-1,2,2), (2,-1,2)$ e $(2,2,-1)$? Onde se encontram os outros vértices do paralelepíepdo?

    (c) Qual o hipervolume do hiperparalelepípedo com 5 de seus vértices em $(0,0,0,0), (1,0,0,0), (1,2,0,0), (-5,0,3,0)$ e $(0,2,-1,-4)$? Onde se encontram os outros vértices do hiperparalelepípedo?

22. Escalonando a matriz de Vandermonde $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$, mostre que $det(V) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ e conclua que V é inversível se, e somente se, os escalares $x_1, \dots, x_n$ são todos distintos entre si. Como aplicação, mostre que, dados $n+1$ pares de números $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ com $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, existe um único polinômio $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $p(x_0) = y_0$, $p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$.

23. Calcule os determinantes das matrizes abaixo:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ log8 & log80 & log800 & log8000 \\ (log8)^2 & (log80)^2 & (log800)^2 & (log8000)^2 \\ (log8)^3 & (log80)^3 & (log800)^3 & (log8000)^3 \end{pmatrix}$. Dica: Vandermonde.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dica: Colunas ortogonais.

(c) $A = \begin{pmatrix} a^2 & (1+a)^2 & (2+a)^2 & (3+a)^2 \\ b^2 & (1+b)^2 & (2+b)^2 & (3+b)^2 \\ c^2 & (1+c)^2 & (2+c)^2 & (3+c)^2 \\ d^2 & (1+d)^2 & (2+d)^2 & (3+d)^2 \end{pmatrix}$. Dica: Multilinearidade alternada.

24. Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, o polinômio característico de A é $p_A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dado por $p_A(x) = det(xI_n - A)$. Se A é uma matriz 2×2, mostre que as raízes(mesmo sendo complexas) r_1 e r_2 de p_A satisfazem $r_1 + r_2 = tr(A)$ e $r_1.r_2 = det(A)$.

25. Resolva os sistemas da lista 0 pela regra de Cramer.