Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Lista 1

araujofpinto

janeiro 2019

1. Os símbolos + e . denotarão a soma e a multiplicação de números reais, enquanto os símbolos $\oplus$ e $\odot$ denotarão a soma e a multiplicação por escalar nos espaços vetoriais.

($\mathbb{R}$) Corpo

($\mathbb{R}^2$) A soma e a multiplicação por escalar de vetores do $\mathbb{R}^2$ são dadas por:
$(a,b)\oplus(c,d) = (a+c, b+d)$ e $\lambda\odot(a,b) = (\lambda.a, \lambda.b)$ Estando bem definidas, basta demonstrarmos os axiomas de espaço vetorial:

(S1) (Soma associativa) $[(a,b)\oplus(c,d)]\oplus(e,f) = (a+c, b+d)\oplus(e,f) = ([a+c]+e, [b+d]+f) = (a+[c+e], b+[d+f]) = (a,b)\oplus(c+e, d+f) = (a,b)\oplus[(c,d)\oplus(e,f)]$

(S2) (Soma comutativa) $(a,b)\oplus(c,d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c,d)\oplus(a,b)$

(S3) (Vetor nulo) $\vec{0} = (0,0)$, pois $(a,b)\oplus(0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$

(S4) (Elemento oposto) $-(a,b) = (-a,-b)$, pois $(a,b)\oplus(-a,-b) = (a+[-a], b+[-b]) = (0,0) = \vec{0}$

(M1) (Multiplicação associativa) $\lambda\odot[\alpha\odot(a,b)] = \lambda\odot[(\alpha.a, \alpha.b)] = (\lambda.[\alpha.a], \lambda.[\alpha.b]) = ([\lambda.\alpha].a, [\lambda.\alpha].b) = [\lambda.\alpha]\odot(a,b)$

(M2) (Unidade multiplicativa) $1\odot(a,b) = (1.a, 1.b) = (a,b)$

(D1) (Distributiva em V) $\lambda\odot[(a,b)\oplus(c,d)] = \lambda\odot[(a+c, b+d)] = (\lambda.[a+c], \lambda.[b+d]) = (\lambda.a+\lambda.c, \lambda.b+\lambda.d) = (\lambda.a, \lambda.b)\oplus(\lambda.c, \lambda.d) = \lambda\odot(a,b)\oplus\lambda\odot(c,d)$

(D2) (Distributiva em $\mathbb{R}$) $[\lambda+\alpha]\odot(a,b) = ([\lambda+\alpha].a, [\lambda+\alpha].b) = (\lambda.a+\alpha.a, \lambda.b+\alpha.b) = (\lambda.a, \lambda.b)\oplus(\alpha.a, \alpha.b) = \lambda\odot(a,b)\oplus\alpha\odot(a,b)$

Logo, $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial real com esta soma e esta multiplicação por escalar.

($\mathbb{R}^3$) A soma e a multiplicação por escalar de vetores do $\mathbb{R}^3$ são dadas por:
$(a_1,a_2,a_3)\oplus(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ e $\lambda\odot(a,b,c) = (\lambda.a, \lambda.b, \lambda.c)$ Estando bem definidas, basta demonstrarmos os axiomas de espaço vetorial:

(S1) (Soma associativa) $[(a_1,a_2,a_3)\oplus(b_1,b_2,b_3)]\oplus(c_1,c_2,c_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)\oplus(c_1,c_2,c_3) = ([a_1+b_1]+c_1, [a_2+b_2]+c_2, [a_3+b_3]+c_3) = (a_1+[b_1+c_1], a_2+[b_2+c_2], a_3+[b_3+c_3]) = (a_1,a_2,a_3)\oplus(b_1+c_1, b_2+c_2, b_3+c_3) = (a_1,a_2,a_3)\oplus[(b_1,b_2,b_3)\oplus(c_1,c_2,c_3)]$

(S2) (Soma comutativa) $(a_1,a_2,a_3)\oplus(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = (b_1+a_1, b_2+a_2, b_3+a_3) = (b_1,b_2,b_3)\oplus(a_1,a_2,a_3)$

(S3) (Vetor nulo) $\vec{0} = (0,0,0)$, pois $(a_1,a_2,a_3)\oplus(0,0,0) = (a_1+0, a_2+0, a_3+0) = (a_1,a_2,a_3)$

(S4) (Elemento oposto) $-(a_1,a_2,a_3) = (-a_1,-a_2,-a_3)$, pois $(a_1,a_2,a_3)\oplus(-a_1,-a_2,-a_3) = (a_1+[-a_1], a_2+[-a_2], a_3+[-a_3]) = (0,0,0) = \vec{0}$

(M1) (Multiplicação associativa) $\lambda\odot[\alpha\odot(a_1,a_2,a_3)] = \lambda\odot[(\alpha.a_1, \alpha.a_2, \alpha.a_3)] = (\lambda.[\alpha.a_1], \lambda.[\alpha.a_2], \lambda.[\alpha.a_3]) = ([\lambda.\alpha].a_1, [\lambda.\alpha].a_2, [\lambda.\alpha].a_3) = [\lambda.\alpha]\odot(a_1,a_2,a_3)$

(M2) (Unidade multiplicativa) $1\odot(a_1,a_2,a_3) = (1.a_1, 1.a_2, 1.a_3) = (a_1,a_2,a_3)$

(D1) (Distributiva em V) $\lambda\odot[(a_1,a_2,a_3)\oplus(b_1,b_2,b_3)] = \lambda\odot(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = (\lambda.[a_1+b_1], \lambda.[a_2+b_2], \lambda.[a_3+b_3])]) = (\lambda.a_1+\lambda.b_1, \lambda.a_2+\lambda.b_2, \lambda.a_3+\lambda.b_3) = (\lambda.a_1, \lambda.a_2, \lambda.a_3)\oplus(\lambda.b_1, \lambda.b_2, \lambda.b_3) = \lambda\odot(a_1,a_2,a_3)\oplus\lambda\odot(b_1,b_2,b_3)$

(D2) (Distributiva em $\mathbb{R}$) $[\lambda+\alpha]\odot(a_1,a_2,a_3) = ([\lambda+\alpha].a_1, [\lambda+\alpha].a_2, [\lambda+\alpha].a_3) = (\lambda.a_1+\alpha.a_1, \lambda.a_2+\alpha.a_2, \lambda.a_3+\alpha.a_3) = (\lambda.a_1, \lambda.a_2, \lambda.a_3)\oplus(\alpha.a_1, \alpha.a_2, \alpha.a_3) = \lambda\odot(a_1,a_2,a_3)\oplus\alpha\odot(a_1,a_2,a_3)$

Logo, $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial real com esta soma e esta multiplicação por escalar.

($\mathbb{R}^n$) A soma e a multiplicação por escalar de vetores do $\mathbb{R}^n$ são dadas por:
$(a_1,\ldots,a_n)\oplus(b_1,\ldots,b_n) = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$ e $\lambda\odot(a_1,\ldots,a_n) = (\lambda.a_1, \ldots, \lambda.a_n)$ Estando bem definidas, basta demonstrarmos os axiomas de espaço vetorial:

(S1) (Soma associativa) $[(a_1,\ldots,a_n)\oplus(b_1,\ldots,b_n)]\oplus(c_1,\ldots,c_n) = (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)\oplus(c_1,\ldots,c_n) = ([a_1+b_1]+c_1,\ldots,[a_n+b_n]+c_n) = (a_1+[b_1+c_1],\ldots,a_n+[b_n+c_n]) = (a_1,\ldots,a_n)\oplus(b_1+c_1,\ldots,b_n+c_n) = (a_1,\ldots,a_n)\oplus[(b_1,\ldots,b_n)\oplus(c_1,\ldots,c_n)]$

(S2) (Soma comutativa) $(a_1,\ldots,a_n)\oplus(b_1,\ldots,b_n) = (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n) = (b_1+a_1,\ldots,b_n+a_n) = (b_1,\ldots,b_n)\oplus(a_1,\ldots,a_n)$

(S3) (Vetor nulo) $\vec{0} = (0,\ldots,0)$, pois $(a_1,\ldots,a_n)\oplus(0,\ldots,0) = (a_1+0,\ldots,a_n+0) = (a_1,\ldots,a_n)$

(S4) (Elemento oposto) $-(a_1,\ldots,a_n) = (-a_1,\ldots,-a_n)$, pois $(a_1,\ldots,a_n)\oplus(-a_1,\ldots,-a_n) = (a_1+[-a_1],\ldots,a_n+[-a_n]) = (0,\ldots,0) = \vec{0}$

(M1) (Multiplicação associativa) $\lambda\odot[\alpha\odot(a_1,\ldots,a_n)] = \lambda\odot[(\alpha.a_1,\ldots,\alpha.a_n)] = (\lambda.[\alpha.a_1],\ldots,\lambda.[\alpha.a_n]) = ([\lambda.\alpha].a_1,\ldots,[\lambda.\alpha].a_n) = [\lambda.\alpha]\odot(a_1,a_2,a_n)$

(M2) (Unidade multiplicativa) $1\odot(a_1,\ldots,a_n) = (1.a_1,\ldots,1.a_n) = (a_1,\ldots,a_n)$

(D1) (Distributiva em V) $\lambda\odot[(a_1,\ldots,a_n)\oplus(b_1,\ldots,b_n)] = \lambda\odot(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n) = (\lambda.[a_1+b_1],\ldots,\lambda.[a_n+b_n)]) = (\lambda.a_1+\lambda.b_1,\ldots,\lambda.a_n+\lambda.b_n) = (\lambda.a_1,\ldots,\lambda.a_n)\oplus(\lambda.b_1,\ldots,\lambda.b_n) = \lambda\odot(a_1,\ldots,a_n)\oplus\lambda\odot(b_1,\ldots,b_n)$

(D2) (Distributiva em $\mathbb{R}$) $[\lambda+\alpha]\odot(a_1,\ldots,a_n) = ([\lambda+\alpha].a_1,\ldots,[\lambda+\alpha].a_n) = (\lambda.a_1+\alpha.a_1,\ldots,\lambda.a_n+\alpha.a_n) = (\lambda.a_1,\ldots,\lambda.a_n)\oplus(\alpha.a_1,\ldots,\alpha.a_n) = \lambda\odot(a_1,\ldots,a_n)\oplus\alpha\odot(a_1,\ldots,a_n)$

Logo, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial real com esta soma e esta multiplicação por escalar.

($\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$)

($\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

($\mathcal{P}(\mathbb{R})$)

($\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$)

2. Lembre-se cancelamento em $V: v\oplus u = v\oplus w \Rightarrow u = w$ n

(a) $0\odot u = (0+0)\odot u = 0\odot u\oplus\odot u \Rightarrow 0\odot u = 0_V$.

(b) $\alpha\odot 0_V = \alpha\odot(0_V\oplus 0_V) = \alpha\odot 0_V\oplus\alpha\odot 0_V \Rightarrow \alpha\odot 0_V = 0_V$.

(c) $(-\alpha)\odot u\oplus\alpha\odot u = (-\alpha\oplus\alpha)\odot u = 0\odot u = 0_V = -(\alpha\odot u)\oplus\alpha\odot u \Rightarrow (-\alpha)\odot u = -(\alpha\odot u)$

$\alpha\odot(-u)\oplus\alpha\odot u = \alpha\odot(u\oplus -u) = \alpha\odot 0_V = 0_V = -(\alpha\odot u)\oplus\alpha\odot u \Rightarrow \alpha\odot(-u) = -(\alpha\odot u)$.

(d) Se $\alpha\neq 0$, então $\alpha\odot u = 0_V$ implica $(\frac{1}{\alpha}.\alpha)\odot u = 1\odot u = u = (\frac{1}{\alpha})\odot 0_V = 0_V$, ou seja, $u = 0_V$.

(e) Se $\alpha\odot u = \alpha\odot v$ e $\alpha\neq 0$, então $(\frac{1}{\alpha}.\alpha)\odot u = (\frac{1}{\alpha}.\alpha)\odot v$, ou seja, $u = v$.

(f) Se $\alpha\odot u = \beta\odot u$ e $u\neq 0_V$, então $(\alpha-\beta)\odot u = 0_V$, de onde $\alpha-\beta = 0$ e $\alpha = \beta$.

3. A soma e a multiplicação por escalar de vetores de $V\times W$ são dadas por: $(v_1,w_1)\oplus(v_2,w_2) = (v_1+v_2,w_1+w_2)$ e $\lambda\odot(v,w) = (\lambda.v,\lambda.w)$ As operações v_1+v_2 e $\lambda.v$ são as do espaço vetorial V, enquanto w_1+w_2 e $\lambda.w$ são as do espaço vetorial W e, portanto, estas satisfazem os axiomas de espaço vetorial. Estando as operações bem definidas em $V\times W$, basta demonstrarmos os axiomas de espaço vetorial:

(S1) (Soma associativa) $[(v_1,w_1)\oplus(v_2,w_2)]\oplus(v_3,w_3) = (v_1+v_2,w_1+w_2)\oplus(v_3,w_3) = ([v_1+v_2]+v_3,[w_1+w_2]+w_3) = (v_1+[v_2+v_3],w_1+[w_2+w_3]) = (v_1,w_1)\oplus(v_2+v_3,w_2+w_3) = (v_1,w_1)\oplus[(v_2,w_2)\oplus(v_3,w_3)]$

(S2) (Soma comutativa) $(v_1,w_1)\oplus(v_2,w_2) = (v_1+v_2,w_1+w_2) = (v_2+v_1,w_2+w_1) = (v_2,w_2)\oplus(v_1,w_1)$

(S3) (Vetor nulo) $\vec{0} = (0_V,0_W)$, pois $(v,w)\oplus(0_V,0_W) = (v+0_V,w+0_W) = (v,w)$

(S4) (Elemento oposto) $-(v,w) = (-v,-w)$, pois $(v,w)\oplus(-v,-w) = (v+[-v],w+[-w]) = (0_V,0_W) = \vec{0}$

(M1) (Multiplicação associativa) $\lambda\odot[\alpha\odot(v,w)] = \lambda\odot[(\alpha.v,\alpha.w)] = (\lambda.[\alpha.v],\lambda.[\alpha.w]) = ([\lambda.\alpha].v,[\lambda.\alpha].w) = [\lambda.\alpha]\odot(v,w)$

(M2) (Unidade multiplicativa) $1\odot(v,w) = (1.v,1.w) = (v,w)$

(D1) (Distributiva em V) $\lambda\odot[(v_1,w_1)\oplus(v_2,w_2)] = \lambda\odot[(v_1+v_2,w_1+w_2)] = (\lambda.[v_1+v_2],\lambda.[w_1+w_2]) = (\lambda.v_1+\lambda.v_2,\lambda.w_1+\lambda.w_2) = (\lambda.v_1,\lambda.w_1)\oplus(\lambda.v_2,\lambda.w_2) = \lambda\odot(v_1,w_1)\oplus\lambda\odot(v_2,w_2)$

(D2) (Distributiva em $\mathbb{R}$) $[\lambda+\alpha]\odot(v,w) = ([\lambda+\alpha].v,[\lambda+\alpha].w) = (\lambda.v+\alpha.v,\lambda.w+\alpha.w) = (\lambda.v,\lambda.w)\oplus(\alpha.v,\alpha.w) = \lambda\odot(v,w)\oplus\alpha\odot(v,w)$

Logo, $V\times W$ é um espaço vetorial real com esta soma e esta multiplicação por escalar.

4. A soma e a multiplicação por escalar de vetores de $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ são dadas por:

   $x \oplus y = x.y$, e $\lambda \odot x = x^\lambda$ As operações $x.y$ e x^λ são a multiplicação e a potenciação de números reais positivos. Estando as operações bem definidas em V, pois $x.y \in V$ e $x^\lambda \in V$, basta demonstrarmos os axiomas de espaço vetorial:

   (S1) (Soma associativa) $[x \oplus y] \oplus z = [x.y] \oplus z = [x.y].z = x.[y.z] = x \oplus [y.z] = x \oplus [y \oplus z]$

   (S2) (Soma comutativa) $x \oplus y = x.y = y.x = y \oplus x$

   (S3) (Vetor nulo) $\vec{0} = 1$, pois $x \oplus \vec{0} = x.1 = x$

   (S4) (Elemento oposto) $-x = x^{-1}$, pois $x \oplus -x = x.x^{-1} = 1 = \vec{0}$

   (M1) (Multiplicação associativa) $\lambda \odot [\alpha \odot x] = \lambda \odot [x^\alpha] = [x^\alpha]^\lambda = x^{[\alpha.\lambda]} = [\lambda.\alpha] \odot x$

   (M2) (Unidade multiplicativa) $1 \odot x = x^1 = x$

   (D1) (Distributiva em V) $\lambda \odot [x \oplus y] = \lambda \odot [x.y] = [x.y]^\lambda = [x^\lambda].[y^\lambda] = [x^\lambda] \oplus [y^\lambda] = \lambda \odot x \oplus \lambda \odot y$

   (D2) (Distributiva em $\mathbb{R}$) $[\lambda + \alpha] \odot x = x^{[\lambda+\alpha]} = [x^\lambda][x^\alpha] = [x^\lambda] \oplus [x^\alpha] = \lambda \odot x \oplus \alpha \odot x$

   Logo, V é um espaço vetorial real com esta soma e esta multiplicação por escalar.

5. **(a)**

   (b)

6. **(a)** **(i)** $0_V \in U$ e $0_V \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $0_V \in U \cap W$ $\square$

   (ii) Dados v_1, v_2 em $U \cap W$, temos que $v_1 + v_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $v_1 + v_2 \in U \cap W$ $\square$

   (iii) Dados $v \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda.v \in U$ e $\lambda.v \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $\lambda.v \in U \cap W$ $\square$

   Portanto, $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.

   (b) **(i)** $0_V \in U$ e $0_V \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $0_V \in U + W$, pois $0_V = 0_V + 0_V$ $\square$

   (ii) Dados v_1, v_2 em $U + W$, temos que $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$ com u_1, u_2 em U e w_1, w_2 em W, donde $v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$ com $u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $v_1 + v_2 \in U + W$ $\square$

   (iii) Dados $v \in U + W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$, donde $\lambda.v = \lambda.(u + w) = \lambda.u + \lambda.w$ com $\lambda.u \in U$ e $\lambda.w \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $\lambda.v \in U + W$ $\square$

   Portanto, $U + W$ é subespaço vetorial de V.

   (c) $(\Rightarrow)$ Suponha, por absurdo, que U não está contido em W, nem W está contido em U. Então existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $u \notin U$ e $\notin W$. Mas u e w estão em $U \cup W$ que é, por hipótese, subespaço vetorial de V. Logo, $u + w$ está em $U \cup W$, donde $u + w \in U$ ou $u + w \in W$. Se $u + w \in U$, então $(u + w) + (-u) = w \in U$ e, se $u + w \in W$, então $(u + w) + (-w) = u \in W$. Absurdo, pois $u \notin U$ e $\notin W$. Logo $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$. $\square$ $(\Leftarrow)$ Se $U \subset W$, então $U \cup W = W$, logo $U \cup W$ é subespaço vetorial de V, pois W é subespaço vetorial de V. Se $W \subset U$, então $U \cup W = U$, logo $U \cup W$ é subespaço vetorial de V, pois U é subespaço vetorial de V. $\square$

   (d) Como $U + W$ é subespaço vetorial de V, para mostrarmos que $U + W$ é subespaço vetorial de S, basta demonstrarmos que $U + W \subseteq S$. Dado $v \in U + W$, temos que $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$. Mas $u \in U \cup W$ e $w \in U \cup W$, logo $u \in S$ e $w \in S$. Como S é subespaço vetorial de V, segue que $v = u + w \in S$. Logo $U + W \subseteq S$ e, portanto, $U + W$ é subespaço vetorial de S $\square$. $\square$

7. **(a)**

   (b) Note que $U_2 = [(1,1,1), (-1,-1,-1)] = [(1,1,1)]$, pois $(-1,-1,-1)$ é múltiplo de $(1,1,1)$, de onde $dim(U_2) = 1$. Mais ainda, temos que $(1,1,1) = (1,0,1) + (0,1,0)$ está em U_1 e, portanto, $U_2 \subseteq U_1$.

   Mas $dim(U_1) = 2$, pois os vetores $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ são linearmente independentes, já que $a(1,0,1) + b(0,1,0) = (0,0,0)$ implicam $a = b = 0$. Logo, $U_1 \neq U_2$.

   (c) $U_1 \neq U_2$, já que $(1,0,0) \notin U_2$, pois $(1,0,0)$ não é combinação linear de $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Para ver isso, escreva $(1,0,0) = a(0,1,0) + b(0,0,1)$, e note que o sistema 3×2 gerado não tem solução:

$$\begin{cases} 0.a + 0.b = 1 \\ 1.a + 0.b = 0 \\ 0.a + 1.b = 0 \end{cases}$$

Também temos que $(0,0,1) \notin U_1$, pois $(0,0,1)$ não é combinação linear de $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$. Para ver isso, escreva $(0,0,1) = a(1,0,0) + b(0,1,0)$, e note que o sistema 3×2 gerado não tem solução:

$$\begin{cases} 1.a + 0.b = 0 \\ 0.a + 1.b = 0 \\ 0.a + 0.b = 1 \end{cases}$$

(d) Note que $2t + 2 = 2(t+1)$ pertence a $U_1 \cap U_2$. Mas $t^2 - 1$ não pertence a U_2 e nem $t^2 + t$ pertence a U_1. Logo, $U_1 \neq U_2$.

(e)

8. **(a)** S é subespaço vetorial de V, pois:

(i) $0_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$

(ii) Dados v_1, v_2 em S, temos que $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix}$, com $x_1 - y_1 - z_1 = 0$ e $x_2 - y_2 - z_2 = 0$. Logo, $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_1 \\ z_1 + z_2 & t_1 + t_2 \end{pmatrix}$ e $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 - y_1 - z_1) + (x_2 - y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0$ e, portanto, $v_1 + v_2 \in S$.

(iii) Dados v em S e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ com $x - y - z = 0$.

Logo, $\lambda.v = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}$ e $\lambda x - \lambda y - \lambda z = \lambda(x - y - z) = \lambda 0 = 0$ e, portanto, $\lambda v \in S$.

Para determinar um gerador de S, note que, dado $v \in S$, temos que $v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ com $x - y - z = 0$, ou ainda, $v = \begin{pmatrix} y+z & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = y.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Logo, $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ é um possível gerador de S.

(b) S não é subespaço vetorial de V.
Para ver isso, tome $v = (3,2) \in S$ e note que um múltiplo de v não está em S, como $5.v = 5.(3,2) = (15,10)$ que não pertence a S, já que $(15,10) = \alpha(1,2) + (3,2)$ gera o sistema 2×1 : $\begin{cases} 1.\alpha + 3 = 15 \\ 2.\alpha + 2 = 10 \end{cases}$ que não tem solução.
Note que S é um espaço afim de V paralelo ao subespaço vetorial $T = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = t(1,2), t \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$, isto é, S é o espaço afim resultante da translação de T por $(3,2)$ (ou por qualquer outro vetor de T): $S = T + \{(3,2)\}$.

(c) S é subespaço vetorial de V, pois:

(i) 0_V é o polinômio nulo dado por $0_V(x) = 0$ para x em $\mathbb{R}$. Como $0_V(-1) = 0$ e $0_V(1) = 0$, segue que $0_V \in S$.

(ii) Dados p, q em S, temos que $p(-1) = p(1) = 0$ e $q(-1) = q(1) = 0$. Logo, $p + q \in V$ com $(p+q)(-1) = p(-1) + q(-1) = 0 + 0 = 0$ e $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$ e, portanto, $p + q \in S$.

(iii) Dados p em S e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $p(-1) = p(1) = 0$. Logo, $\lambda.p \in V$ com $(\lambda.p)(-1) = \lambda p(-1) = \lambda 0 = 0$ e, portanto, $\lambda.p \in S$.

Para determinar um gerador de S, note que, dado $p \in S$, temos que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $p(-1) = -a + b - c + d = 0$ e $p(1) = a + b + c + d = 0$, gerando o sistema linear homogêneo 2×4 : $\begin{cases} -a + b - c + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$ que pode ser escalonado para $\begin{cases} -a + b - c + d = 0 \\ 0a + 2b + 0c + 2d = 0 \end{cases}$, que é um sistema possível e indeterminado com 2 graus de liberdade, pois para quaisquer valores de c, d em $\mathbb{R}$, temos uma solução para o sistema com $b = -d$ e $a = -c$.

Ou seja, se $p \in S$, então $p(x) = (-c)x^3 + (-d)x^2 + cx + d = [-cx^3 + cx] + [-dx^2 + 1] = c[-x^3 + x] + d[-x^2 + 1]$. Logo, tomando q_1, q_2 em S tais que $q_1(x) = -x^3 + x$ e $q_2(x) = -x^2 + 1$, temos que $\{q_1, q_2\}$ é um possível gerador de S.

(d) S é subespaço vetorial de V, pois:

(i) $tr(0_V) = 0 + \cdots + 0 = 0 \Rightarrow 0_V \in S$

(ii) Dados A, B em S, temos que $A \in V$ e $B \in V$, com $tr(A) = 0$ e $tr(B) = 0$. Logo, $A + B \in V$ e $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0$ e, portanto, $A + B \in S$.

(iii) Dados A em S e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $A \in V$ com $tr(A) = 0$.

Logo, $\lambda.A \in V$ e $tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = \lambda 0 = 0$ e, portanto, $\lambda A \in S$.

S é um subespaço vetorial de V com dimensão $n^2 - 1$, já que a única restrição nas n^2 entradas de uma matriz $n \times n$ é que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ e, portanto, podemos tirar uma das entradas da diagonal em função das outras, como por exemplo $a_{11} = -\sum_{i=2}^{n} a_{ii}$.

(e) S é subespaço vetorial de V, pois:

(i) $0_V = (0, 0, 0, 0) \in S$, pois $0 - 0 + 0 + 0 = 0$ e $-0 + 2.0 + 0 - 0 = 0$

(ii) Dados $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ em S, temos que $x_1 - y_1 + z_1 + t_1 = 0, -x_1 + 2y_1 + z_1 - t_1 = 0, x_2 - y_2 + z_2 + t_2 = 0$ e $-x_2 + 2y_2 + z_2 - t_2 = 0$. Logo, $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in S$, pois $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) + (t_1 + t_2) = 0 + 0 = 0$ e $-(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) - (t_1 + t_2) = 0 + 0 = 0$.

(iii) Dados $v = (x, y, z, t)$ em S e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda.v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ com $(\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) + (\lambda t) = \lambda 0 = 0$ e $-(\lambda x) + 2(\lambda y) + (\lambda z) - (\lambda t) = \lambda 0 = 0$ e, portanto, $\lambda.p \in S$.

Dado $v = (x, y, z, t)$ em S, geramos o sistema linear homogêneo 2×4 : $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -x + 2y + z - t = 0 \end{cases}$ que pode ser escalonado para $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 0x + y + 2z + 0t = 0 \end{cases}$ que é um sistema possível e indeterminado com 2 graus de liberdade, pois para quaisquer valores de z e t em $\mathbb{R}$, temos uma solução para o sistema com $y = -2z$ e $x = -3z - t$.

Ou seja, se $v \in S$, então $v = (-3z - t, -2z, z, t) = (-3z, -2z, z, 0) + (-t, 0, 0, t) = z(-3, -2, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$.

Logo, $\{(-3, -2, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ é um possível gerador de S.

9. Para mostrarmos que $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é gerado por $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, vamos demonstrar que qualquer matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é combinação linear de A_1, A_2, A_3 e A_4, ou seja, que existe solução para o sistema linear 4×4 gerado pela equação matricial $A = x.A_1 + y.A_2 + z.A_3 + t.A_4$: $\begin{cases} x + y + z + 0t = a \\ x + y + 0z + t = b \\ x + 0y + z + t = c \\ 0x + y + z + t = d \end{cases}$ que é equivalente a $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right)$

Escalonando o sistema, obtemos: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \\ 0 & -1 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-a \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d+c-a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d+c-a \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+c+d-2a \end{array}\right)$ que é um sistema possível e determinado, cuja solução é dada por:

$t = \frac{b+c+d-2a}{3}$, $z = d + c - a - 2\frac{b+c+d-2a}{3} = \frac{a+c+d-2b}{3}$, $y = d - \frac{a+c+d-2b}{3} - \frac{b+c+d-2a}{3} = \frac{a+b+d-2c}{3}$ e $x = a - \frac{a+b+d-2c}{3} - \frac{a+c+d-2b}{3} = \frac{a+b+c-2d}{3}$, ou seja $(x, y, z, w) = (\frac{a+b+c-2d}{3}, \frac{a+b+d-2c}{3}, \frac{a+c+d-2b}{3}, \frac{b+c+d-2a}{3})$.

Portanto, $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é gerador de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Observação: Como $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ tem 4 elementos gerando o espaço $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ cuja dimensão é 4, temos que $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e cada vetor $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pode ser escrito como $A = x.A_1 + y.A_2 + z.A_3 + t.A_4 = \frac{a+b+c-2d}{3}.A_1 +$

$\frac{a+b+d-2c}{3}.A_2 + \frac{a+c+d-2b}{3}.A_3 + \frac{b+c+d-2a}{3}.A_4$, ou seja (x, y, z, t) é a representação de A em coordenadas na base $\mathcal{B}$, isto é, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\frac{a+b+c-2d}{3}, \frac{a+b+d-2c}{3}, \frac{a+c+d-2b}{3}, \frac{b+c+d-2a}{3})_{\mathcal{B}}$.

10. Seja F o plano afim de $\mathbb{R}^3$ que contém os vetores $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

    A equação cartesiana de F é da forma $ax + by + cz = d$. Substituindo os vetores dados na equação, obtemos o sistema linear 3×4 : $\begin{cases} a + 0b + 0c = d \\ 0a + b + 0c = d \\ 0a + 0b + c = d \end{cases}$ que é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade, pois para qualquer valor de d em $\mathbb{R}$, temos uma solução para o sistema com $c = d$, $b = d$ e $a = d$. Portanto, uma possível equação cartesiana de F é $x + y + z = 1$.

    Para obter a equação vetorial de F, note que qualquer $v = (x, y, z) \in F$ pode ser escrito como $v = (1-y-z, y, z) = (1, 0, 0) + (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = (1, 0, 0) + y.(-1, 1, 0) + z.(-1, 0, 1)$, logo uma possível equação vetorial de F é dada por $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha.(-1, 1, 0) + \beta.(-1, 0, 1), \alpha, \beta$ em $\mathbb{R}$; e uma possível equação paramétrica é dada por $(x, y, z) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta$ em $\mathbb{R}$.

    Portanto, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ ou $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha.(-1, 1, 0) + \beta.(-1, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ ou $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

11. Vamos provar por indução em m.

    Para $m = 1$, dados v_1 em F e $\alpha_1 = 1$, temos que $\alpha_1 v_1 = v_1 \in F$. Para $m = 2$, dados v_1, v_2 em F e α_1, α_2 em $\mathbb{R}$ com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, temos que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in F$ pela definição de espaço afim.

    Note que, para $m = 3$, dados v_1, v_2, v_3 em F e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ em $\mathbb{R}$ com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, temos que pelo menos um dos coeficientes $\alpha_j \neq 1$; sem perda de generalidade, considere $\alpha_3 \neq 1$, então $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ pode ser escrito como $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3)[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_3} v_2] + \alpha_3 v_3$ e, como $\frac{\alpha_1}{1-\alpha_3} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_3} = 1$, temos $u = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_3} v_2 \in F$ pela hipótese de indução e, portanto, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3)u + \alpha_3 v_3 \in F$, pois u e v_3 estão em F e $(1 - \alpha_3) + \alpha_3 = 1$.

    Para o caso geral, suponha demonstrado que, dados $v_1, \ldots, v_m \in F$, então $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in F$, se $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$; e vamos demonstrar que, dados $v_1, \ldots, v_{m+1} \in F$, então $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} \in F$, se $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m + \alpha_{m+1} = 1$. Pelo menos um dos coeficientes $\alpha_j \neq 1$; sem perda de generalidade, considere $\alpha_{m+1} \neq 0$, então $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1}$ pode ser escrito como $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = (1 - \alpha_{m+1})[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{m+1}} v_1 + \cdots + \frac{\alpha_m}{1-\alpha_{m+1}} v_m] + \alpha_{m+1} v_{m+1}$ e, como $\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{m+1}} + \cdots + \frac{\alpha_m}{1-\alpha_{m+1}} = 1$, temos $u = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_{m+1}} v_1 + \cdots + \frac{\alpha_m}{1-\alpha_{m+1}} v_m \in F$ e, portanto, $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} = (1 - \alpha_{m+1})u + \alpha_{m+1} v_{m+1} \in F$, pois u e v_{m+1} estão em F e $(1 - \alpha_{m+1}) + \alpha_{m+1} = 1$.

12. Sejam F_1 e F_2 espaços afim de V. Vamos mostrar que $F_1 \cap F_2$ é um espaço afim de V, ou seja, dados u, v em $F_1 \cap F_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, queremos que $\alpha u + (1 - \alpha)v$ esteja em $F_1 \cap F_2$.

    Como F_1 é um espaço afim de V, temos que $\alpha u + (1 - \alpha)v \in F_1$ e, como F_2 é um espaço afim de V, temos que $\alpha u + (1 - \alpha)v \in F_2$.

    Logo $\alpha u + (1 - \alpha)v$ esteja em $F_1 \cap F_2$ e, portanto, $F_1 \cap F_2$ é um espaço afim de V.

    Observação: Esse resultado vale para intersecções infinitas de espaços afim

13. Sejam V um espaco vetorial real, $v_1, \ldots, v_n \in V$ e $v \in V$.

    (a) ($\Rightarrow$) Como $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é linearmente independente, nenhum dos vetores é combinação linear dos outros vetores, logo $v \notin [v_1, \ldots, v_n]$.

    ($\Leftarrow$) (Lema da aula 10) Para verificarmos que $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é linearmente independente, considere $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \alpha v = 0_V$ (*). Note que, se $\alpha \neq 0$, então $v = -\frac{\lambda_1}{\alpha} v_1 + \cdots + -\frac{\lambda_n}{\alpha} v_n \in [v_1, \ldots, v_n]$.

    Como $\alpha = 0$, a equação (*) se torna $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$, que só tem a solução trivial $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, pois $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.

(b) É claro que $[v_1, \dots, v_n] \subseteq [v_1, \dots, v_n, v]$.

Para mostrarmos que $[v_1, \dots, v_n, v] \subseteq [v_1, \dots, v_n]$, note que $v = \beta_1 v_1 + \dots \beta_n v_n$ e, dado $w \in [v_1, \dots, v_n, v]$, temos $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \alpha v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \alpha.[\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = [\lambda_1 + \alpha\beta_1] v_1 + \dots + [\lambda_n + \alpha\beta_n] v_n \in [v_1, \dots, v_n]$.

Logo, $[v_1, \dots, v_n] = [v_1, \dots, v_n, v]$

14. **(a)** A equação $a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) + d(2,2,5) = 0_V = (0,0,0)$ gera o sistema linear homogêneo $3 \times 4 : \begin{cases} a + 0b + 0c + 2d = 0 \\ 0a + b + 0c + 2d = 0 \\ 0a + 0b + c + 5d = 0 \end{cases}$ que é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade e, portanto, U é linearmente dependente. Como o sistema (já escalonado) tem 3 linhas não-nulas (ou 3 colunas com pivôs), temos que o subespaço $S = spanU$ tem dimensão 3 e, como $S \subseteq \mathbb{R}^3$, temos $S = \mathbb{R}^3$. Logo, uma possível base de S é $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

(b) A equação $a(1,1,1) + b(1,2,1) + c(3,2,-1) = 0_V = (0,0,0)$ gera o sistema linear homogêneo 3×3 $\begin{cases} a + b + 3c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$ que pode ser escalonado como $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$, mostrando que este é um sistema possível e determinado com a única solução sendo a trivial $a = b = c = 0$ e, portanto, U é linearmente independente.

(c) A equação $a(1,2,3) + b(1,4,9) + c(1,8,27) = 0_V = (0,0,0)$ gera o sistema linear homogêneo 3×3 $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 4b + 8c = 0 \\ 3a + 9b + 27c = 0 \end{cases}$ que pode ser escalonado como $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 4 & 8 & | & 0 \\ 3 & 9 & 27 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 6 & 24 & | & 0 \end{pmatrix} \to$
$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}$, mostrando que este é um sistema possível e determinado com a única solução sendo a trivial $a = b = c = 0$ e, portanto, U é linearmente independente.

(d) Sejam p, q, r, s em V, dados por $p(x) = 1, q(x) = x - 1, r(x) = x^2 + 2x + 1, s(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$.
A equação $a.p + b.q + c.r + d.s = 0_V$, onde 0_V é o polinômio nulo, resulta em $a.p(x) + b.q(x) + c.r(x) + d.s(x) = a.1 + b.(x-1) + c.(x^2 + 2x + 1) + d.x^2 = (a - b + c).1 + (b + 2c).x + (c + d).x^2 = 0$, gerando o sistema linear homogêneo 3×4 $\begin{cases} a - b + c + 0d = 0 \\ 0a + b + 2c + 0d = 0 \\ 0a + 0b + c + d = 0 \end{cases}$ que já está escalonado.

Este é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade e, portanto, U é linearmente dependente. Como o sistema (já escalonado) tem 3 linhas não-nulas (ou 3 colunas com pivôs), temos que o subespaço $S = spanU$ tem dimensão 3 e, como $\{p, q, s\}$ é linearmente independente, temos que uma possível base de S é $\{p, q, s\}$. Outra base possível seria $\{1, x, x^2\}$.

(e) Sejam p, q, r, s em V, dados por $p(x) = x(x-1) = x^2 - x, q(x) = x^3, r(x) = 2x^3 - x^2, s(x) = x$ para $x \in \mathbb{R}$.
A equação $a.p + b.q + c.r + d.s = 0_V$, onde 0_V é o polinômio nulo, resulta em $a.p(x) + b.q(x) + c.r(x) + d.s(x) = a.(x^2 - x) + b.x^3 + c.(2x^3 - x^2) + d.x = (-a + d).x + (a - c).x^2 + (b + 2c).x^3 = 0$, gerando o sistema linear homogêneo 3×4 $\begin{cases} -a + 0b + 0c + d = 0 \\ a + 0b - c + 0d = 0 \\ 0a + b + 2c + 0d = 0 \end{cases}$ que pode ser escalonado como $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to$
$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$
Este é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade e, portanto, U é linearmente dependente. Como o sistema (já escalonado) tem 3 linhas não-nulas (ou 3 colunas com pivôs), temos que o subespaço $S = spanU$ tem dimensão 3 e, como $\{q, r, s\}$ é linearmente independente, temos que uma possível base de S é $\{q, r, s\}$. Outra base possível seria $\{x, x^2, x^3\}$.

(f) A equação $a(1,0,0,-1)+b(0,1,0,1)+c(1,0,0,1)+d(0,0,1,1)=0_V=(0,0,0,0)$ gera o sistema linear homogêneo 4×4 $\begin{cases} a+0b+c+0d=0\\ 0a+b+0c+0d=0\\ 0a+0b+0c+d=0\\ -a+b+c+d=0\end{cases}$ que pode ser escalonado como $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0\\ -1 & 1 & 1 & 1 & | & 0\end{pmatrix}\to$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0\end{pmatrix}$, mostrando que este é um sistema possível e determinado com a única solução sendo a trivial $a=b=c=0$ e, portanto, U é linearmente independente.

(g) Sejam $f,g,h\in U$ dadas por $f(x)=1$, $g(x)=e^x$ e $h(x)=xe^x$.
A equação $af+bg+ch=0_V$, onde 0_V é a função nula de V dada por $0_V(x)=0$ para $x\in\mathbb{R}$, nos gera infinitas equações $af(x)+bg(x)+ch(x)=a+be^x+cxe^x=0$ para cada x em $\mathbb{R}$.
Escolhendo 3 valores para x em $\mathbb{R}$, como $x=0$, $x=1$ e $x=-1$; obtemos o sistema linear homogêneo 3×3 $\begin{cases} 1a+1b+0c=0\\ 1a+eb+ec=0\\ 1a+\frac{1}{e}b-\frac{1}{e}c=0\end{cases}$ que é um sistema possível e determinado com solução $a=0$, $b=0$ e $c=0$.
Como a solução trivial é a única, temos que U é linearmente independente.

(h) Sejam $f,g,h\in U$ dadas por $f(x)=1$, $g(x)=\sin x$ e $h(x)=\cos x$.
A equação $af+bg+ch=0_V$, onde 0_V é a função nula de V dada por $0_V(x)=0$ para $x\in\mathbb{R}$, nos gera infinitas equações $af(x)+bg(x)+ch(x)=a+b\sin x+c\cos x=0$ para cada x em $\mathbb{R}$.
Escolhendo 3 valores para x em $\mathbb{R}$, como $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\pi$; obtemos o sistema linear homogêneo 3×3 $\begin{cases} 1a+0b+1c=0\\ 1a+1b+0c=0\\ 1a+0b-c=0\end{cases}$ que é um sistema possível e determinado com solução $a=0$, $b=0$ e $c=0$.
Como a solução trivial é a única, temos que U é linearmente independente.

(i) Sejam $f,g,h\in U$ dadas por $f(x)=1$, $g(x)=\sin^2 x$ e $h(x)=\cos^2 x$. Note que $f=g+h$ e, portanto, U é linearmente dependente.
Algumas possíveis bases de *spanU* seriam $\{\sin^2 x,\cos^2 x\}$ ou $\{1,\sin^2 x\}$ ou $U=\{1,\cos^2 x\}$.

(j) A equação $aA_1+bA_2+cA_3=0_V=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ gera o sistema linear homogêneo 4×3 $\begin{cases} a+b+c=0\\ a+0b+c=0\\ 0a+0b+c=0\\ 0a+b+c=0\end{cases}$ que pode ser escalonado como $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0\\ 1 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 1 & | & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0\\ 0 & -1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 1 & | & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0\\ 0 & -1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\end{pmatrix}\to$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0\\ 0 & -1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}$, mostrando que este é um sistema possível e determinado com a única solução sendo a trivial $a=b=c=0$ e, portanto, U é linearmente independente.

15. **(a)** Como $V=\mathbb{R}^4$ tem dimensão 4 e $\mathcal{B}$ tem 4 vetores, para provarmos que $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^4$, basta mostrarmos que $\mathcal{B}$ é gerador de $\mathbb{R}^4$ ou que $\mathcal{B}$ é linearmente independente.
Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Para isso, vamos mostrar que $a(1,1,1,1)+b(0,1,1,1)+c(0,0,1,1)+d(0,0,0,1)=0_V=(0,0,0,0)$ tem apenas a solução trivial. Como esta equação gera o sistema linear homogêneo 4×4 $\begin{cases} a+0b+0c+0d=0\\ a+b+0c+0d=0\\ a+b+c+0d=0\\ a+b+c+d=0\end{cases}$ que já está escalonado (a menos de trocas de linhas), temos que este a solução nula é a única solução e, portanto, $\mathcal{B}$ é linearmente independente, donde $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Sejam p, q, r, s em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definidos por $p(x) = 1$, $q(x) = 1 - x$, $r(x) = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$ e $s(x) = (1-x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$.

Como $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tem dimensão 4 e $\mathcal{B}$ tem 4 vetores, para provarmos que $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, basta mostrarmos que $\mathcal{B}$ é gerador de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ou que $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

Para verificarmos se $\mathcal{B}$ é linearmente independente, vamos analisar a equação $ap + bq + cr + ds = 0_V = 0.1 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3$.

Esta equação gera o sistema linear homogêneo 4×4 $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 0a - b - 2c - 3d = 0 \\ 0a + 0 + c + 3d = 0 \\ 0a + 0b + 0c - d = 0 \end{cases}$, que já está escalonado e tem todas as linhas não nulas (ou tem os pivôs na diagonal não-nulos) e sua única solução é a trivial, de onde $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

Portanto, $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

16. Como $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3 e $\mathcal{B}$ tem 3 vetores, para provarmos que $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^3$, basta mostrarmos que $\mathcal{B}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ ou que $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

Para verificarmos se $\mathcal{B}$ é linearmente independente, vamos analisar a equação $\alpha(a,1,0) + \beta(1,a,0) + \gamma(0,1,a) = 0_V = (0,0,0)$ em função do parâmetro a.

Esta equação gera o sistema linear homogêneo 3×3 $\begin{cases} a\alpha + \beta + 0\gamma = 0 \\ \alpha + a\beta + \gamma = 0 \\ 0\alpha + 0\beta + a\gamma = 0 \end{cases}$, que tem a última linha nula quando $a = 0$ e, portanto, $\mathcal{B}$ não é base de $\mathbb{R}^3$ se $a = 0$.

Se $a \neq 0$, o sistema pode ser escalonado como $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{a} & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a & | & 0 \end{pmatrix}$ e, portanto, $\mathcal{B}$ será linearmente independente se os pivôs na diagonal forem não-nulos, ou seja $a \neq 0$ e $a - \frac{1}{a} \neq 0$, ou ainda, $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $a \neq -1$.

Portanto, $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $a \notin \{-1, 0, 1\}$.

17. Como $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3 e $\mathcal{B}$ tem 3 vetores, para provarmos que $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^3$, basta mostrarmos que $\mathcal{B}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ ou que $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Para isso, vamos mostrar que $a(1,0,1) + b(1,1,-1) + c(0,2,0) = 0_V = (0,0,0)$ tem apenas a solução trivial.

Esta equação gera o sistema linear homogêneo 3×3 $\begin{cases} a + b + 0c = 0 \\ 0a + b + 2c = 0 \\ a - b + 0c = 0 \end{cases}$ que pode ser escalonado como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, a solução trivial é a única solução e, portanto, $\mathcal{B}$ é linearmente independente, donde $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

Para determinar as coordenadas de um vetor (x,y,z) na base $\mathcal{B}$, queremos escrever (x,y,z) como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$, ou seja, queremos encontrar a, b, c tais que $(x,y,z) = a(1,0,1) + b(1,1,-1) + c(0,2,0)$.

Esta equação gera o sistema linear 3×3 $\begin{cases} a+b+0c=x \\ 0a+b+2c=y \\ a-b+0c=z \end{cases}$ que pode ser escalonado como $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & 2 & | & y \\ 1 & -1 & 0 & | & z \end{pmatrix} \to$ $\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & 2 & | & y \\ 0 & -2 & 0 & | & z-x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & 2 & | & y \\ 0 & 0 & 4 & | & 2y+z-x \end{pmatrix}$ que é um sistema possível e determinado, cuja solução é dada por $c = \frac{y}{2}+\frac{z}{4}-\frac{x}{4}$, $b = y-2c = \frac{x}{2}-\frac{z}{2}$, e $a = x-b = \frac{3x}{2}+\frac{z}{2}$, ou seja $(a,b,c) = (\frac{x}{2}+\frac{z}{2}, \frac{x}{2}-\frac{z}{2}, \frac{y}{2}+\frac{z}{4}-\frac{x}{4})$.

Portanto, $(x,y,z) = [\frac{x}{2}+\frac{z}{2}].(1,0,1)+[\frac{x}{2}-\frac{z}{2}].(1,1,-1)+[\frac{y}{2}+\frac{z}{4}-\frac{x}{4}].(0,2,0) = (\frac{x}{2}+\frac{z}{2}, \frac{x}{2}-\frac{z}{2}, \frac{y}{2}+\frac{z}{4}-\frac{x}{4})_{\mathcal{B}}$.
Logo, as coordenadas dos vetores pedidos na base $\mathcal{B}$ são $(1,0,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4})_{\mathcal{B}}, (0,1,0) = (0,0,\frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$ e $(0,0,1) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}))_{\mathcal{B}}$.

As outras coordenadas pedidas são: $(1,1,1)_{\mathcal{B}} = 1(1,0,1)+1(1,1,-1)+1(0,2,0) = (2,3,0) = (2,3,0)_{\mathcal{C}}$

$(2,3,-1)_{\mathcal{B}} = 2(1,0,1)+3(1,1,-1)-1(0,2,0) = (5,1,-1) = (5,1,-1)_{\mathcal{C}}$

$(0,0,1)_{\mathcal{B}} = 0(1,0,1)+0(1,1,-1)+1(0,2,0) = (0,2,0) = (0,2,0)_{\mathcal{C}}$

18. **(a)** $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Portanto, S é linearmente independente.

(b) Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ uma matriz qualquer em V, vamos mostrar que existe solução para $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 =$ $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, resolvendo o sistema $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = a \\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = b \\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = b \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = c \end{cases} \to \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = a \\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 = b \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = c \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & a \\ 1 & 1 & 2 & | & b \\ 1 & 0 & 2 & | & c \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & a \\ 0 & 2 & 2 & | & b-a \\ 0 & 1 & 2 & | & c-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & a \\ 0 & 2 & 2 & | & b-a \\ 0 & 0 & 1 & | & c+\frac{a}{2}-\frac{b}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$ existe solução (e é única).

Portanto, S é gerador de V

(c) Como S é um gerador de V linearmente independente, temos que S é base de V. Como S tem 3 elementos, segue que a dimensão de S é 3.

19. **(a)** É claro que os polinômios q_1 e q_2 dados por $q_1(x) = 1-x+x^2-x^3$ e $q_2(x) = 1+x+x^2+x^3$ formam um conjunto linearmente independente (já que um não é múltiplo do outro) e, portanto, $dim(U \cap V) = dim[1-x+x^2-x^3, 1+x+x^2+x^3] = 2$.

Portanto, $dim(U+V) = dim(U)+dim(V)-dim(U \cap V) = 3+3-2 = 4$. Logo, $U+V$ é um subespaço vetorial de dimensão 4 dentro de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, que também tem dimensão 4 e, portanto, $U+V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) A soma não é direta, pois $dim(U \cap V) > 0$.

20. Sabemos que $dim(U+W) = dim(U)+dim(W)-dim(U \cap W) = 3+3-dim(U \cap W) = 6-dim(U \cap W)$. Como $dim(U+W) \leq dim(\mathbb{R}^4) = 4$ e $dim(U \cap W) \leq dim(U) = 3$, temos que $U \cap W$ tem dimensão 2 ou 3: Se $dim(U \cap W) = 3$, então $U \cap W = U = W$ e, portanto, $U+W = U = W$; se $dim(U \cap W) = 2$, então $dim(U+W) = 4$ e, portanto, $U+W = \mathbb{R}^4$.

Para descobrirmos a dimensão de $U \cap W$, vamos verificar quantos vetores (2 ou 3) linearmente independentes existem no conjunto gerador de $U \cap W$ dado por $\{(1,2,1,0), (-1,1,0,1), (1,5,2,1)\}$. Se $\alpha_1(1,2,1,0)+\alpha_2(-1,1,0,1)+$

$\alpha_3(1,5,2,1) = (0,0,0,0)$, temos o sistema $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

Como o sistema escalonado tem 2 colunas com pivôs, segue que $dim(U \cap W) = 2$ e, portanto, $dim(U + W) = 4$, ou seja, $U + W = \mathbb{R}^4$.

21. **(a)** Como $\{(1,0,0),(1,1,1)\}$ é linearmente independente, temos $dim(U) = 2$ e como $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente, temos $dim(W) = 2$.

Se $v \in U \cap W$, então $v = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(1,1,1) = \beta_1(0,1,0) + \beta_2(0,0,1)$, gerando o sistema $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$ que é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade cuja solução pode ser dada por $-\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$, ou seja $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) = \alpha_2(-1,1,1,0)$, de onde $dim(U \cap W) = 1$ e $\{(-1,1,1,0)\}$ é base de $U \cap W$.

Logo, $dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$ e, portanto, $U + W$ é um subespaço vetorial de dimensão 3 dentro de $\mathbb{R}^3$, que também tem dimensão 3 e, portanto, $U + W = \mathbb{R}^3$. Por isso, uma possível base de $U + W$ é a base canônica $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

(b)

(c) Como U é solução de um sistema homogêneo escalonado 2×4, temos que o sistema é possível e indeterminado com 2 graus de liberdade, ou seja, temos $dim(U) = 2$. Como W é solução de um sistema homogêneo escalonado 1×4, temos que o sistema é possível e indeterminado com 3 graus de liberdade, ou seja, temos $dim(W) = 3$.

Se $(x,y,z,t) \in U \cap W$, então temos o sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$ que é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade cuja solução pode ser dada em função do parâmetro t por $z = -t$, $y = 0$ e $x = 0$, ou seja $(x,y,z,t) = (0,0,-t,t) = t(0,0,-1,1)$, de onde $dim(U \cap W) = 1$ e $\{(0,0,-1,1)\}$ é base de $U \cap W$.

Logo, $dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4$ e, portanto, $U + W$ é um subespaço vetorial de dimensão 4 dentro de $\mathbb{R}^4$, que também tem dimensão 4 e, portanto, $U + W = \mathbb{R}^4$. Por isso, uma possível base de $U + W$ é a base canônica $\mathcal{C} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

22. **(a)** Temos $dim(U) = 1$ e $dim(W) = 2$. Como $u_1 \notin W$, temos que $2 = dim(W) < dim(U+W) \leq dim(V) = 3$, logo $U + W$ é um subespaço vetorial de dimensão 3 dentro de V, que também tem dimensão 3 e, portanto, $V = U + W$. Como $dim(U \cap W) = dim(U+W) - dim(U) - dim(W) = 3 - 1 - 2 = 0$, temos que a soma é direta, ou seja $V = U \oplus W$.

(b) U é o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ -1 & 3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$ que é possível e indeterminado com 1 grau de liberdade. Uma possível base de U é o conjunto unitário $\{(1,-3,5)\}$. Logo, $W = [(0,1,0),(0,0,1)]$ é um subespaço de dimensão 2 tal que $V = U \oplus W$.

(c) Como U não está contido em W, tome u_1 em U com $u_1 \notin W$. Como $u_1 \notin W$, temos que $2 = dim(W) < dim(U+W) \leq dim(V) = 3$, logo $U+W$ é um subespaço vetorial de dimensão 3 dentro de V, que também tem dimensão 3 e, portanto, $V = U+W$. Como $dim(U \cap W) = dim(U+W) - dim(U) - dim(W) = 3 - 1 - 2 = 0$, temos que a soma é direta, ou seja $V = U \oplus W$.

23. **(a)** $A \in U \Rightarrow A = \begin{pmatrix} d_1 & a & b \\ a & d_2 & c \\ b & c & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&c\\0&c&0\end{pmatrix} = d_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + d_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

logo $\mathcal{B}_U = \{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\}$ é um conjunto gerador de U. Como $\mathcal{B}_U$ é linearmente independente (verificar), segue que $\mathcal{B}_U$ é base de U e, portanto, a $dim(U) = 6$.

(b) $A \in U \Rightarrow A = \begin{pmatrix}0&e&f\\-e&0&g\\-f&-g&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&e&0\\-e&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&f\\0&0&0\\-f&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&g\\0&-g&0\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix} + g\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$, logo $\mathcal{B}_W = \{\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\}$ é um conjunto gerador de W. Como $\mathcal{B}_W$ é linearmente independente (verificar), segue que $\mathcal{B}_W$ é base de W e, portanto, a $dim(U) = 3$.

(c) Note que, se $A \in U \cap W$, temos $A = \begin{pmatrix}d_1&a&b\\a&d_2&c\\b&c&d_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&e&f\\-e&0&g\\-f&-g&0\end{pmatrix}$ e, portanto, $A = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, isto é, $U \cap W = \{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\}$.

Mas $dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 6 + 3 - 0 = 9$ e, portanto, $U + W$ é um subespaço vetorial de dimensão 9 dentro de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, que também tem dimensão 9 e, portanto, $\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) = U + W$. Como $dim(U \cap W) = 0$, temos que a soma é direta, ou seja $\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

24. Para ver que $V = U + W$, tome f em V arbitrária e defina g_f, h_f em V por $g_f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $h_f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ e observe que $f = g_f + h_f$. Além disso, $g_f \in U$ (pois $g_f(-x) = \frac{f(-x)+f(-[-x])}{2} = g_f(x)$), e $h_f \in W$ (pois $h_f(-x) = \frac{f(-x)-f(-[-x])}{2} = -h_f(x)$). Portanto, temos $V = U + W$.

    Note que, se $f \in U \cap W$, então dado $x \in \mathbb{R}$, temos $f(-x) = f(x)$ (pois $f \in U$) e $f(-x) = -f(x)$ (pois $f \in W$) e, portanto, $f(x) = -f(x)$, ou seja $f(x) = 0$ e, portanto, $f = 0_V$ a função nula. Logo, $U \cap W = \{0_V\}$.

    Como $V = U + W$ e $U \cap W = \{0_V\}$, temos que a soma é direta, isto é, $V = U \oplus W$.

25. **(a)**
    (b)
    (c)
    (d)
    (e)
26. **(a)**
    (b)
    (c)
27. **(a)**
    (b)
    (c)
28. **(a)**
    (b)
    (c)