Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Lista 1

araujofpinto

janeiro 2019

1. Mostre que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais reais: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n, \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

2. Sejam V um espaço vetorial real, $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes afirmações:
   a) $0 \odot u = 0_V$
   b) $\alpha \odot 0_V = 0_V$
   c) $(-\alpha) \odot u = -(\alpha \odot u) = \alpha \odot (-u)$
   d) se $\alpha \odot u = 0_V$, então $\alpha = 0$ ou $u = 0_V$
   e) Se $\alpha \odot u = \alpha \odot v$ e $\alpha \neq 0$, então $u = v$.
   f) Se $\alpha \odot u = \beta \odot u$ e $u \neq 0_V$, então $\alpha = \beta$.

3. Sejam V e W espaços vetoriais reais. Mostre que o conjunto

$$V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$$

munido com as operações

$$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2),\ \forall (v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$$

$$\alpha \odot (v, w) = (\alpha v, \alpha w),\ \forall (v, w) \in V \times W,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

é um espaço vetorial real.

4. Mostre que o conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ munido com as operações:

$$x_1 \oplus x_2 = x_1 x_2,\ \forall x, y \in V$$

$$\alpha \odot x = x^\alpha,\ \forall x \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

é um espaço vetorial real.

5. Considere o conjunto $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, com as seguintes operações:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 5, y_1 + y_2)$$

$$\alpha \odot (x, y) = (\alpha x + 5(\alpha - 1), \alpha y).$$

   a) Verifique que V é um espaço vetorial real.
   b) Verifique que o subconjunto $W = \{(x, y) \in V : x = -5\}$ é subespaço vetorial de V.

6. Seja V um espaço vetorial real e U e W subespaços vetoriais de V.
   (a) Mostre que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V;
   (b) Mostre que $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ é subespaço vetorial de V;
   (c) Mostre que $U \cup W$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $U \subset W$ ou $W \subset U$;
   (d) Mostre que, se S é um subespaço vetorial de V que contém $U \cup W$, então $U + W$ é um subespaço vetorial de S.

7. Em cada ítem abaixo, decida se os subespaços U_1 e U_2 do espaço vetorial real V são iguais:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = [(-1,2,0),(3,1,2)]$, $U_2 = [(2,3,2),(-4,1,-2),(-1,2,0),(0,0,0)]$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = [(1,0,1),(0,1,0)]$, $U_2 = [(1,1,1),(-1,-1,-1))]$;

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = [(1,0,0),(0,1,0)]$, $U_2 = [(0,1,0),(0,0,1)]$;

(d) $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $U_1 = [t^2-1, t+1]$, $U_2 = [t^2+t, 2t+2]$;

(e) $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $U_1 = [t^2, t, 1]$, $U_2 = [t^2+t+1]$;

8. Dados um espaço vetorial real V e um subconjunto S de V, decida se S é subespaço vetorial de V. Em caso positivo, determine um conjunto que seja gerador de S:

(a) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R}), S = \{A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x - y - z = 0\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = \alpha(1,2) + (3,2), \alpha \in \mathbb{R}\}$;

(c) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = p(1) = 0\}$;

(d) $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $S = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$, onde o **traço** $tr(A)$ de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é a soma dos elementos de sua diagonal principal, ou seja $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$;

(e) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = 0, -x + 2y + z - t = 0\}$.

9. Mostre que o espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Encontre as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) do espaço(plano) afim de $\mathbb{R}^3$ que contém os vetores $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

11. Seja V um espaço vetorial real e um espaço afim $F \subset V$. Mostre que, dados $v_1, \ldots, v_m \in F$, então $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in F$, para quaisquer números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$.

12. Mostre que a intersecção de espaços afim de um espaço vetorial V é um espaço afim de V.

13. Sejam V um espaco vetorial real, $v_1, \ldots, v_n \in V$ e $v \in V$.

a) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente no espaço vetorial real V, prove que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é lineramente independente em V se e somente se, $v \notin [v_1, \ldots, v_n]$. Interprete esse resultado geometricamente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

b) Se $v \in [v_1, \ldots, v_n]$, prove que $[v_1, \ldots, v_n] = [v_1, \ldots, v_n, v]$. Interprete esse resultado geometricamente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

14. Dados um espaço vetorial real V e um subconjunto U de V, decida se U é linearmente independente em V. No caso de U ser linearmente dependente, determine uma base do subespaço vetorial S de V gerado por U:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,2,5)\}$,

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$,

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(1,2,3),(1,4,9),(1,8,27)\}$.

(d) $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, $U = \{1, x-1, x^2+2x+1, x^2\}$,

(e) $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, $U = \{x(x-1), x^3, 2x^3 - x^2, x\}$.

(f) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)\}$.

(g) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $U = \{1, e^x, xe^x\}$;

(h) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $U = \{1, \sin x, \cos x\}$;

(i) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $U = \{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$;

(j) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, $U = \{A_1, A_2, A_3\}$, com $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Dados um espaço vetorial real V e um subconjunto $\mathcal{B}$ de V, decida se B é base de V:

    (a) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)$;

    (b) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$.

16. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ o seguinte conjunto $B = \{(a,1,0),(1,a,0),(0,1,a)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?

17. Mostre que $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,-1),(0,2,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas dos vetores $(1,0,0),(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ na base acima. Determine as coordenadas dos vetores $(1,1,1)_{\mathcal{B}}$, $(2,3,-1)_{\mathcal{B}}$ e $(0,0,1)_{\mathcal{B}}$ com relação à base canônica.

18. Considere as seguintes matrizes em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

    Tome o subconjunto $S = \{A_1, A_2, A_3\}$ de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
    Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$V = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A^t = A\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

    a) Mostre que S é linearmente independente.

    b) Mostre que S gera V.

    c) Conclua que S é uma base de V e determine a dimensão de V. Justifique sua resposta.

19. Sejam U e V subespaços vetoriais de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com $dimU = dimV = 3$ tais que

$$U \cap V = [1 - x + x^2 - x^3, 1 + x + x^2 + x^3].$$

    a)Determine o subespaço $U + V$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

    b)Vale que $U \oplus V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$?

    Justifique cada passo da sua resposta.

20. Sejam U e W subespaços vetoriais de dimensão 3 em $\mathbb{R}^4$. Considerando que

$$U \cap W = [(1,2,1,0),(-1,1,0,1),(1,5,2,1)].$$

    Qual é a dimensão do subespaço $U + W$? Justifique a sua resposta.

21. Dados um espaço vetorial real V e subespaçoes vetoriais U, W de V, determine uma base para $U \cap W$ e $U + W$. O subespaço $U + W$ é uma soma direta? Justifique

    (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = [(1,0,0),(1,1,1)]$ e $W = [(0,1,0),(0,0,1)]$;

    (b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : a - 2c = 0\}$ e $W = [1-x, x-x^2]$;

    (c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0, z - t = 0\}$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$

22. Seja $V = \mathbb{R}^3$.

    (a) Seja U o subespaço de V gerado pelo elememto $u_1 = (1,0,0)$ e W o subespaço de V gerado pelos elementos $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$. Mostre que vale $V = U \oplus W$;

    (b) Considere o subespaço U de V dado por $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0, -x + 3y + 2z = 0\}$. Determine um subespaço W de V tal que $V = U \oplus W$;

    (c) Sejam U e W subespaços vetoriais de V tais que $dim(U) = 1$, $dim(W) = 2$ e U não está contido em W. Mostre que $V = U \oplus W$.

23. Sejam $U = \{A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ e $W = \{A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$ subespaços de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$:

    a) Determine a dimensão de U e exiba uma base de U;

    b) Determine a dimensão de W e exiba uma base de U;

    c) Mostre que $\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

24. Considere o espaço vetorial real $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Mostre que os seguintes subconjuntos

$$U = \{f \in V : f(-x) = f(x); \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{f \in V : f(-x) = -f(x); \forall x \in \mathbb{R}\}$$

são subespaços vetoriais de V. Mostre que $V = U \oplus W$.

25. (Elon 1.18) Sejam E um espaço vetorial e $u, v \in E$. O *segmento de reta* de extremidades u, v é, por definição, o conjunto $[u, v] = \{(1-t)u + tv; 0 \leq t \leq 1\}$ (ou $\overline{uv}$). Um conjunto $X \subset E$ chama-se *convexo* quando $u, v \in X \Rightarrow [u, v] \subset X$. (Ou seja: o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X.) Prove:

    (a) A intersecção $X_1 \bigcap \ldots \bigcap X_m$ de conjuntos convexos $X_1, \ldots, X_n \subset E$ é um conjunto convexo;

    (b) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \leq c\}$ é convexo em $\mathbb{R}^2$;

    (c) O conjunto $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, c < y < d\}$ é convexo em $\mathbb{R}^3$;

    (d) Seja $X \subset E$ convexo. Se r, s, t são números reais ≥ 0 tais que $r+s+t = 1$, então $u, v, w \in X \Rightarrow ru+sv+tw \in X$;

    (e) Generalizando o resultado acima, a expressão $t_1v_1 + \cdots + t_kv_k$, onde $t_1, \ldots, t_k$ são ≥ 0 e $t_1 + \cdots + t_k = 1$ chama-se uma *combinação convexa* dos vetores $v_1, \ldots, v_k$. Se o conjunto $X \subset E$ é convexo, prove que toda combinação convexa de vetores $v_1, \ldots, v_k \in X$ ainda pertence a X.

26. Um corpo é um conjunto K com as operações de soma $+ : K \times K \to K$ e multiplicação $. : K \times K \to K$ satisfazendo:

    (S1) (associatividade) $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todos x, y, z em K;

    (S2) (comutatividade) $x + y = y + x$, para todos x, y em K;

    (S3) (elemento neutro da soma) existe $0 \in K$ tal que $0 + x = x + 0 = x$, para todo $x \in K$;

    (S4) (elemento oposto) para cada $x \in K$, existe um elemento em K, denotado por $-x$ e chamado de oposto de x tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

    (M1) (associatividade) $x.(y.z) = (x.y).z$, para todos x, y, z em K;

    (M2) (comutatividade) $x.y = y.x$, para todos x, y em K;

    (M3) (elemento neutro da multiplicação) existe $1 \in K$ com $1 \neq 0$ e tal que $1.x = x.1 = x$, para todo $x \in K$;

    (M4) (elemento inverso) para cada $x \in K$ com $x \neq 0$, existe um elemento em K, denotado por x^{-1} e chamado de inverso de x tal que $x.(x^{-1}) = (x^{-1}).x = 1$;

    (D) (distributividade) $x.(y + z) = x.y + x.z$, para todos x, y, z em K;

    Seja K um corpo, mostre que:

    (a) $x.0 = 0$, para todo $x \in K$;

    (b) $x.y = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$;

    (c) $-x = (-1).x$, para todo $x \in K$.

27. Mostre que os conjuntos a seguir são corpos quando munidos da soma e multiplicação de números reais:

    (a) $\mathbb{Q}$;

    (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$;

    (c) $\mathbb{C} = \{a + b.i; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, onde $i^2 = -1$.

28. Sejam K e L corpos. Uma função $f : K \to L$ chama-se um homomorfismo de corpos quando satisfaz (i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; e (ii) $f(x.y) = f(x).f(y)$, para todo $x, y \in K$. Mostre que:

    (a) Para qualquer homomorfismo de corpos temos que $f(0_K) = 0_L$;

    (b) Prove que se $f : K \to L$ é um homomorfismo de corpos então ou $f(x) = 0_L$, para todo $x \in K$, ou então $f(1_K) = 1_L$ e f é injetora.

    (c) Se $K = L$ e f é um homomorfismo de corpos injetor, mostre que $f(x) = x$, para todo $x \in K$.