Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Lista 0

araujofpinto

janeiro 2019

1 Números reais

1. **(a)**

   (b)

   (c)

2. **(a)** $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} = \frac{1}{2}.y - \frac{1}{2}$;

   (b) ($\Rightarrow$) Se $a = 0$, então $f(x) = 0.x + a_0 = a_0$, ou seja, f é constante e, portanto, não é injetora. Logo, se f for inversível, f não é constante e, portanto, $a \neq 0$

   ($\Leftarrow$) Se $a \neq 0$, então f é inversível, pois é injetora(já que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a.x_1 + a_0 = a.x_2 + a_0 \Rightarrow a.x_1 = a.x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$) e sobrejetora(já que, dado y em $\mathbb{R}$, existe x em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, bastando tomar $x = \frac{y-a_0}{a}$).

   (c) $f^{-1}(y) = \frac{y-a_0}{a} = \frac{1}{a}.y - \frac{a_0}{a} = b.y + b_0$, logo f^{-1} é uma função afim.

   (d) ($\Rightarrow$) Se f não é inversível, então $a = 0$, logo $f(x) = 0.x + a_0 = a_0$ e f é constante.

   ($\Leftarrow$) Se f é constante, então f não é injetora, logo f não é inversível.

   (e) Sabemos que f, dada por $f(x) = a.x + a_0$, é crescente se, e somente se, $a > 0$ e é decrescente se, e somente se, $a < 0$. Como f^{-1} é dada por $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}.y - \frac{a_0}{a}$, o coeficiente angular $\frac{1}{a}$ de f^{-1} tem o mesmo sinal de a. Logo, dada f função afim inversível, temos que f é crescente se, e somente se, f^{-1} é crescente e f é decrescente se, e somente se, f^{-1} é decrescente.

   (f) Sejam f e g funções afins, então $f(x) = ax + a_0$ e $g(x) = bx + b_0$. Logo $g \circ f$ é uma função afim dada por $(g \circ f)(x) = g(ax + a_0) = b[ax + a_0] + b_0 = [ba]x + [ba_0 + b_0]$.

   (g) Se f e g são funções afim crescentes, então $f(x) = ax + a_0$ e $g(x) = bx + b_0$ com $a > 0$ e $b > 0$, logo $g \circ f$ dada por $(g \circ f)(x) = [ba]x + [ba_0 + b_0]$ é crescente, pois $b.a > 0$.

   Isso não vale para funções afins decrescentes, pois a composição de funções afins decrescentes é uma função afim crescente ($a < 0$ e $b < 0$ implicam em $b.a > 0$).

3. **(a)** (i) $f(x + y) = a.(x + y) = a.x + a.y = f(x) + f(y)$; e $f(\lambda.x) = a.(\lambda.x) = \lambda.(a.x) = \lambda.f(x)$. Logo, f é linear.

   (b) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear e seja $a = f(1)$. Pela linearidade, temos que $f(x) = f(x.1) = x.f(1) = x.a = a.x$.

   (c) ($\Rightarrow$) Se $a = 0$, então $f(x) = 0.x = 0$, ou seja, f é constante e, portanto, não é injetora. Logo, se f for inversível, f não é constante e, portanto, $a \neq 0$. ($\Leftarrow$) Se $a \neq 0$, então f é inversível, pois é injetora(já que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a.x_1 = a.x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$) e sobrejetora(já que, dado y em $\mathbb{R}$, existe x $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, bastando tomar $x = \frac{y}{a}$).

   (d) $f^{-1}(y) = \frac{y}{a} = \frac{1}{a}.y = b.y$, logo f^{-1} é uma função linear.

   (e) ($\Rightarrow$) Se f não é inversível, então $a = 0$, logo $f(x) = 0.x = 0$ e f é nula.

   ($\Leftarrow$) Se f é nula, então f não é injetora, logo f não é inversível.

   (f) Sabemos que f, dada por $f(x) = a.x$, é crescente se, e somente se, $a > 0$ e é decrescente se, e somente se, $a < 0$. Como f^{-1} é dada por $f^{-1}(y) = \frac{1}{a}.y$, o coeficiente angular $\frac{1}{a}$ de f^{-1} tem o mesmo sinal de a. Logo, dada f função afim inversível, temos que f é crescente se, e somente se, f^{-1} é crescente e f é decrescente se, e somente se, f^{-1} é decrescente.

   (g) Sejam f e g funções lineares, então $f(x) = ax$ e $g(x) = bx$. Logo $g \circ f$ é uma função linear dada por $(g \circ f)(x) = g(ax) = b[ax] = [ba]x$.

   (h) Se f e g são funções lineares crescentes, então $f(x) = ax$ e $g(x) = bx$ com $a > 0$ e $b > 0$, logo $g \circ f$ dada por $(g \circ f)(x) = [ba]x$ é crescente, pois $b.a > 0$.

   Isso não vale para funções lineares decrescentes, pois a composição de funções lineares decrescentes é uma função linear crescente ($a < 0$ e $b < 0$ implicam em $b.a > 0$).

(i) Se $a \neq 0$, a equação $f(x) = b$ é possível e determinada e seu conjunto solução é unitário: $S = \{x \in \mathbb{R} : a.x = b\} = \{\frac{b}{a}\}$.

(j) Se $a = 0$ e $b \neq 0$, a equação $f(x) = 0x = b$ é impossível e seu conjunto solução é vazio: $S_b = \{x \in \mathbb{R} : 0.x = b\} = \emptyset$.

Se $a = 0$ e $b = 0$, a equação $f(x) = 0x = b$ é possível e indeterminada com 1 grau de liberdade e seu conjunto solução é formado por todos os números reais: $S_0 = \{x \in \mathbb{R} : 0.x = 0\} = \mathbb{R}$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$, se $x \geq 2$, e $f(x) = 3x + 1$, se $x < 2$.

(a) f é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2)$ implica em $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$ ou $3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$ e, portanto, $x_1 = x_2$. f é sobrejetora, pois dado $y \in \mathbb{R}$ existe x em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, bastando tomar $x = \frac{y-3}{2}$ se $y \geq 7$, e $x = \frac{y-1}{3}$, se $y < 7$. Logo, f é bijetora

(b) A inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$, se $y \geq 7$, e $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$, se $y < 7$.

(c)

2 Geometria analítica

1. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (1, 2) + \lambda(-1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (1 - \lambda, 2 + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

2. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 8\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (1, 2) + \lambda(3, -2), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (1 + 3\lambda, 2 - 2\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

3. $\vec{v} = (2, -3)$

4. $\vec{n} = (2, 1)$

5. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = \frac{7}{2}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (\frac{1}{2}, 1)\lambda(2, -3), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (\frac{1}{2} + 2\lambda, 1 - 3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

6. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (1, -1) + \lambda(2, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (1 + 2\lambda, -1 + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

7. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = -3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (-5, 2) + \lambda(-1, 1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (-5 - \lambda, 2 + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

8. $r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (-5, 2, 3) + \lambda(9, -9, -9), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (-5 + 9\lambda, 2 - 9\lambda, 3 - 9\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

9. $d((0, 2, 1), (\lambda, 2-\lambda, -2+2\lambda)) = \sqrt{(\lambda - 0)^2 + (2 - \lambda - 2)^2 + (-2 + 2\lambda - 1)^2} = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + (2\lambda - 3)^2} = \sqrt{6\lambda^2 - 12\lambda + 9} = \sqrt{3} \Rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 3 \Rightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$. Logo, o ponto procurado é $P = (1, 2 - 1, -2 + 2) = (1, 1, 0)$.

10. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + z = 4\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + \alpha(1, 1, -2) + \beta(0, -1, -1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1 + \alpha, \alpha - \beta, 1 - 2\alpha - \beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

11. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 4z = -1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (-1, 0, 0) + \alpha(2, 1, 0) + \beta(-4, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (-1 + 2\alpha - 4\beta, \alpha, \beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

12. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(-2, 1, 0) + \beta(1, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1 - 2\alpha + \beta, \alpha, \beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

13. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 4\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (4, 0, 0) + \alpha(1, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (4 + \alpha - 2\beta, \alpha, \beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

14. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 2), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (\alpha, \beta, \alpha + 2\beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

15. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 4\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (0, -4, 0) + \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 3, 1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (\alpha, -4 + 2\alpha + 3\beta, \beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

16. $r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda(1, 2, -1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (\lambda, 1 + 2\lambda, -1 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$

17. Se $(x,y,z) \in \pi \cap r$, então $(x,y,z) = (1,1,3) + \lambda(1,-1,1) + \mu(0,1,3) = (1,1,1) + \alpha(3,2,1)$, logo:

$$\begin{cases} 1+\lambda = 1+3\alpha \\ 1-\lambda+\mu = 1+2\alpha \\ 3+\lambda+3\mu = 1+\alpha \end{cases} \to \begin{cases} \lambda - 3\alpha = 0 \\ -\lambda+\mu-2\alpha = 0 \\ \lambda+3\mu-\alpha = -2 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & 0 \\ -1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & 3 & -1 & | & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \to$$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 17 & | & -2 \end{pmatrix}$. Logo, a solução do sistema é dada por $\alpha = -\frac{2}{17}$, $\mu = -\frac{10}{17}$ e $\lambda = -\frac{6}{17}$.

Como a solução é única, temos que r é transversal a π e o ponto de intersecção de r e π é $P = (\frac{11}{17}, \frac{13}{17}, \frac{15}{17})$.

18. Se $(x,y,z) \in r = \pi_1 \cap \pi_2$, então $(x,y,z) = (1+\alpha, -2, -\alpha-\beta) = (1+\lambda-\mu, 2\lambda+\mu, 3-\mu)$, logo:

$$\begin{cases} 1+\alpha = 1+\lambda-\mu \\ -2 = 2\lambda+\mu \\ -\alpha-\beta = 3-\mu \end{cases} \to \begin{cases} \alpha-\lambda+\mu = 0 \\ 2\lambda+\mu = -2 \\ -\alpha-\beta+\mu = 3 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \to$$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \to \lambda = -1 - \frac{\mu}{2}$, de onde podemos tirar e equação da reta r substituindo na equação de π_2: $(x,y,z) = (1 + [-1-\frac{\mu}{2}] - \mu, 2[-1-\frac{\mu}{2}] + \mu, 3-\mu) = (-\frac{3\mu}{2}, -2, 3-\mu)$.

Logo, $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (0,-2,3) + \mu(-\frac{3}{2}, 0, -1)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (-\frac{3\mu}{2}, -2, 3-\mu)\}$

3 Problemas lineares

1. $\frac{3x}{5} + 48 = x \Rightarrow x = 120$

   R: O livro tem 120 páginas e Claudete leu 72 páginas.

2. Seja M o número de mulheres e H o número de homens. Então $\begin{cases} M = H + 15 \\ 20H + 10M = 960 \end{cases}$ cuja solução é $M = 42$ e $H = 27$.

   R: 27 homens foram a essa danceteria.

3. Sejam C o número de respostas certas e E o número de respostas erradas. Então $\begin{cases} C + E = 25 \\ 500 + 200C - 150E = 600 \end{cases}$ cuja solução é $C = 11$ e $E = 14$.

   R: Ele errou 14 questões.

4. Sejam P o número de parafusos e C o número de caixas para 50 parafusos. Então $\begin{cases} P = 50C \\ P = 45(C+27) \end{cases}$ cuja solução é $C = 243$ e $P = 12150$.

   R: 12150 parafusos.

5. **(a)** Sejam x_1 o número de saltos do tipo I e x_2 o número de saltos do tipo II. Então para chegar em 190 cm para o Leste e 950 cm ao norte $\begin{cases} 10x_1 - 20x_2 = 190 \\ 30x_1 - 40x_2 = 950 \end{cases}$ cuja solução é $x_2 = 19$ e $x_1 = 57$.

   R: Cururu pode chegar a esse ponto dando 57 saltos tipo I e 19 saltos tipo II

   (b) Sejam x_1 o número de saltos do tipo I e x_2 o número de saltos do tipo II. Então para chegar em 180 cm para o Leste e 950 cm ao norte $\begin{cases} 10x_1 - 20x_2 = 180 \\ 30x_1 - 40x_2 = 950 \end{cases}$ cuja única solução é $x_2 = \frac{41}{2}$ e $x_1 = 59$.

   R: Cururu não consegue a esse ponto dando apenas esses tipos de salto

6. Sejam M o peso de Maria, V o peso de Vera e I o peso do irmão. Então $\begin{cases} M + V = 99 \\ M + I = 81 \\ V + I = 74 \end{cases}$ cuja única solução é $M = 53$, $V = 46$ e $I = 28$.

   R: O peso de Maria é de 53 kg, o peso de Vera é de 46 kg e o peso do irmão é de 28 kg.

7. **(a)** Escolhendo $z = 0$, temos $x = 7$ e $y = -1$, logo uma solução possível é $(x, y, z) = (7, -1, 0)$

   (b) Para cada $z = t$ em $\mathbb{R}$, temos o sistema possível e determinado 2×2 $\begin{cases} x + y = 6 - t \\ 3x + 4y = 17 - 2t \end{cases}$ cuja solução é $y = -1 + t$ e $x = 7 - 2t$. Logo, toda solução é da forma $(x, y, z) = (7 - 2t, -1 + t, t)$

   (c) A expressão $9x + 11y + 7z$ é combinação linear das duas expressões dadas nas duas equações, pois $9x + 11y + 7z = 3[x + y + z] + 2[3x + 4y + 2z]$. Logo $9x + 11y + 7z = 3[6] + 2[17] = 52$.

8. Sejam S o preço do sanduíche, C o preço do café e T o preço da torta. Então $\begin{cases} 3S + 7C + T = 31,50 \\ 4S + 10C + T = 42 \end{cases}$ tem infinitas soluções, mas a expressão pedida $S + C + T$ é combinação linear das duas expressões dadas nas duas equações, pois $S + C + T = 3[3S + 7C + T] - 2[4S + 10C + T]$. Logo $S + C + T = 3[31,50] - 2[42] = 9,50$.

   R: O preço de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta é de $R\$9,50$.

4 Sistemas lineares

1. $\frac{mx}{4} - \frac{(x-2)}{m} = 1 \Rightarrow [\frac{m}{4} - \frac{1}{m}]x = 1 - \frac{2}{m} \Rightarrow ax = b$ com $a = \frac{m}{4} - \frac{1}{m}$ e $b = 1 - \frac{2}{m}$. A equação só existe para $m \neq 0$.

   (a) A equação admite única solução se $a \neq 0$, ou seja, $\frac{m}{4} - \frac{1}{m} \neq 0$, isto é, se $m \neq 2$ e $m \neq -2$ (E $m \neq 0$).

   (b) A equação não admite solução se $a = 0$ e $b \neq 0$, isto é, se $m = -2$.

   (c) A equação admite infinitas soluções se $a = 0$ e $b = 0$, isto é, se $m = 2$.

2. (a) $S = \{(3, -1)\}$ (SPD)

   (b) $S = \{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})\}$ (SPD)

   (c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 5\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (0, 5) + \lambda(1, -1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (\lambda, 5 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ (SPI 1)

   (d) $S = \emptyset$ (SI)

3. Multiplicando a primeira equação por $\sin a$ e a segunda por $\cos a$, obtemos o sistema $\begin{cases} \sin^2 a.x - \sin a.\cos a.y = b.\sin a \\ \cos^2 a.x + \sin a.\cos a.y = c.\cos a \end{cases}$ e somando as duas equações, obtemos $x = b.\sin a + c.\cos a$.

   Multiplicando a primeira equação por $\cos a$ e a segunda por $\sin a$, obtemos o sistema $\begin{cases} \sin a.\cos a.x - \cos^2 a.y = b.\cos a \\ \sin a.\cos a.x + \sin^2 a.y = c.\sin a \end{cases}$ e subtraindo as duas equações, obtemos $y = c.\sin a - b.\cos a$.

   Logo, o sistema é possível e determinado e seu conjunto solução é $S = \{(b.\sin a + c.\cos a, c.\sin a - b.\cos a)\}$

4. Não é possível um sistema linear homogêneo ser SI, pois sempre existe a solução trivial que é a solução nula.

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 1 & -4 & 1 & | & 0 \\ 3 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{11} & | & 0 \end{pmatrix}$

   $S = \{(0, 0, 0)\}$ (SPD)

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 4 & 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 5 & | & 0 \\ 0 & -5 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

   $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (-t, t, t), t \in \mathbb{R}\}$ (SPI 1)

   (c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & | & 0 \\ 1 & 8 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & \frac{36}{5} & \frac{12}{5} & | & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & \frac{36}{5} & \frac{12}{5} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

   $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (\frac{2t}{3}, -\frac{t}{3}, t), t \in \mathbb{R}\}$ (SPI 1)

   (d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & -3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 & | & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 5 & | & 0 \\ 0 & -\frac{13}{3} & 13 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -12 & | & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

   $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (2t, 3t, t), t \in \mathbb{R}\}$ (SPI 1)

5. **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ -2 & 3 & -3 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & -3 & | & 4 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 5 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & | & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

$S = \{(-1, 2, 2)\}$ (SPD)

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & -5 \\ -1 & 1 & -2 & | & 7 \\ 3 & -5 & -4 & | & -15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & -5 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & | & \frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & | & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & -5 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & | & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -12 & | & 12 \end{pmatrix}$

$S = \{(-3, 2, -1)\}$ (SPD)

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & | & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & | & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & | & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -2 \end{pmatrix}$

$S = \{(4, \frac{1}{2}, -\frac{11}{2}, 2)\}$ (SPD)

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & | & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & | & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & 3 \end{pmatrix}$

$S = \{(0, 0, 2, -1)\}$ (SPD)

6. **(a)** $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a - b - c = -1 \\ a + b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & | & \frac{14}{3} \end{pmatrix}$

$c = \frac{7}{3}, b = -2$ e $a = -\frac{1}{3}$

$S = \{(x, y, z) = (-3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{7})\}$

(b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{2x-y}{3z+2} = \frac{z+1}{2x+y} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & -3 & | & 2 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -5 & | & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & | & -1 \end{pmatrix}$

$S = \{(x, y, z) = (\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4})\}$

(c) $\begin{cases} \frac{x+2y}{-3u-1} = \frac{2x-y}{z-2u} = 1 \\ \frac{x-2z}{u-y} = \frac{3u-1}{2z-y} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3u = -1 \\ 2x - y - z + 2u = 0 \\ x + 2y - 2z - 2u = 0 \\ 2y - 4z + 3u = 1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -4 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & | & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -4 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{22}{5} & \frac{7}{5} & | & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & | & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -4 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{62}{5} & | & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$S = \{(-\frac{10}{31}, -\frac{9}{31}, -\frac{13}{31}, -\frac{1}{31})\}$

(d) $\begin{cases} 2^x.2^y.2^z = 8 \\ 3^x.3^z = 3^9.9^y \\ 125.5^x = 5^z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=9 \\ -x+z=3 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & | & 9 \\ -1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -2 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 2 & | & 9 \end{pmatrix}$

$S = \{(x,y,z) = (\frac{3}{2}, -3, \frac{9}{2})\}$

(e) $\begin{cases} 3^x.3^y.3^z = 1 \\ \frac{2^x}{2^y.2^z} = 4 \\ 4^{-x}.16^y.4^z = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=2 \\ -x+2y+z=-1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ -1 & 2 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$

$S = \{(x,y,z) = (1,1,-2)\}$

(f) $\begin{cases} \log_2(x+y+z) = 0 \\ \log_y(x+z) = 1 \\ \log_3 5 + \log_3 x = \log_3(y-z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=0 \\ 5x-y+z=0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 5 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & -6 & -4 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & -4 & | & -2 \end{pmatrix}$

$S = \{(x,y,z) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

7. **(a)** $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \\ 2x-5y=-1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 10 \\ 1 & -1 & | & 4 \\ 2 & -5 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & -2 & | & -6 \\ 0 & -7 & | & -21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & -2 & | & -6 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

$S = \{(x,y) = (7,3)\}$

(b) $\begin{cases} x+2y=11 \\ x+3y=16 \\ 2x+5y=27 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 11 \\ 1 & 3 & | & 16 \\ 2 & 5 & | & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 11 \\ 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

$S = \{(x,y) = (1,5)\}$

(c) $\begin{cases} x-2y=8 \\ 3x-y=9 \\ x+y=1 \\ 5x+7y=-10 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 8 \\ 3 & -1 & | & 9 \\ 1 & 1 & | & 1 \\ 5 & 7 & | & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 8 \\ 0 & 5 & | & -15 \\ 0 & 3 & | & -7 \\ 0 & 17 & | & -50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 8 \\ 0 & 5 & | & -15 \\ 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$

$S = \emptyset$

(d) $\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x-y=7 \\ x+y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 4 \\ 3 & -1 & | & 7 \\ 1 & 1 & | & 1 \\ 5 & 7 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 4 \\ 0 & 5 & | & -5 \\ 0 & 3 & | & -3 \\ 0 & 17 & | & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 4 \\ 0 & 5 & | & -5 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

$S = \{(x,y) = (2,-1)\}$

(e) $\begin{cases} -x+3y-z=1 \\ x+y+z=7 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 4 & 0 & | & 8 \end{pmatrix}$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (5-t, 2, t), t \in \mathbb{R}\}$

(f) $\begin{cases} -x+y-2z=1 \\ 2x-y+3t=2 \\ x+2y+z-2t=0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & | & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & | & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -11 & | & -11 \end{pmatrix}$

$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z,t) = (1-s, s, -1+s, s), s \in \mathbb{R}\}$

8. $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-3y+z=1 \\ -2y+z=a \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 2 & | & 1 \\ 0 & -2 & 1 & | & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & a-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x-by+3z=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & -b & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -b+2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b}{3}+\frac{11}{3} & | & 0 \end{pmatrix}$

Para que os sistemas admitam infinitas soluções devemos ter $a = \frac{1}{2}$ e $b = 11$.

9. **(a)**
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)
   (f)
   (g)
   (h)
   (i)
   (j)
   (k)
   (l)
   (m)