Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Lista 0

araujofpinto

janeiro 2019

1 Números reais

1. A função módulo $|.|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que:

(a) $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

(b) $|x.y| = |x|.|y|$, para todos x, y em $\mathbb{R}$;

(c) (Desigualdade triangular) $|x + y| \leq |x| + |y|$, para todos x, y em $\mathbb{R}$.

2. Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma função afim (ou polinômio de grau 1) se $f(x) = a.x + a_0$, onde a e a_0 são constantes reais.

(a) Calcule a função inversa da função afim $f(x) = 2.x + 1$;

(b) Mostre que $f(x) = a.x + a_0$ é inversível se, e somente se, $a \neq 0$;

(c) Calcule a inversa de $f(x) = a.x + a_0$ para $a \neq 0$. Conclua que a inversa de uma função afim é afim;

(d) Mostre que uma função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é inversível se, e somente se, f é constante;

(e) Dada uma função afim inversível f, mostre que f é crescente/decrescente se, e somente se, f^{-1} é crescente/decrescente;

(f) Mostre que a composta de funções afins é afim;

(g) Mostre que a composta de funções afins crescentes é crescente. Isso vale para funções afins decrescentes?

3. Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma função linear se (i)$f(x + y) = f(x) + f(y)$ e (ii)$f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$ para todos, x, y, λ em $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que, dado $a \in \mathbb{R}$, a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a.x$ é linear;

(b) Mostre que, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a.x$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

(c) Mostre que $f(x) = a.x$ é inversível se, e somente se, $a \neq 0$;

(d) Calcule a inversa de $f(x) = a.x$ para $a \neq 0$. Conclua que a inversa de uma função linear é linear.

(e) Mostre que uma função linear $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é inversível se, e somente se, f é nula;

(f) Dada uma função linear inversível f, mostre que f é crescente/decrescente se, e somente se, f^{-1} é crescente/decrescente;

(g) Mostre que a composta de funções lineares é linear;

(h) Mostre que a composta de funções lineares crescentes é crescente. Isso vale para funções lineares decrescentes?

(i) Se $f(x) = a.x$ com $a \neq 0$, resolva a equação $f(x) = b$, isto é, exiba o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : a.x = b\}$ e classifique a equação como 'possível e determinada' ou 'possível e indeterminada' ou 'impossível';

(j) Se $f(x) = 0.x$, discuta a resolução da equação $f(x) = b$ em função do parâmetro b, isto é, exiba o conjunto $S_b = \{x \in \mathbb{R} : 0.x = b\}$ e classifique a equação como 'possível e determinada' ou 'possível e indeterminada' ou 'impossível'.

4. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 3$, se $x \geq 2$, e $f(x) = 3x + 1$, se $x < 2$.

(a) Mostre que f é bijetora;

(b) Determine a função inversa de f;

(c) Exiba os gráficos das funções f e f^{-1} no mesmo plano.

2 Geometria analítica

1. Determine as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) da reta que passa pelo ponto $(1,2)$ e que seja paralela à direção do vetor $\vec{v} = (-1,1)$.

2. Determine as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) da reta que passa pelo ponto $(1,2)$ e que seja perpendicular à direção do vetor $\vec{n} = (2,3)$.

3. Determine um vetor cuja direção seja paralela à reta $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 2\}$.

4. Determine um vetor cuja direção seja perpendicular à reta $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\}$.

5. Determine as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) da reta que passa pelo ponto $(\frac{1}{2}, 1)$ e que seja paralela à reta $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 2\}$.

6. Determine as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) da reta que passa pelo ponto $(1,-1)$ e que é perpendicular à reta $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 1\}$.

7. Dados os pontos $A = (-5,2)$ e $B = (4,-7)$ escreva as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) da reta determinada por A e B.

8. Dados os pontos $A = (-5,2,3)$ e $B = (4,-7,-6)$ escreva as equações (vetorial e paramétrica) da reta determinada por A e B.

9. Dados o ponto $A = (0,2,1)$ e a reta $r = \{(x,y,z) = (0,2,-2) + \lambda(1,-1,2), \lambda \in \mathbb{R}\}$, ache os pontos de r cuja distância ao ponto A seja $\sqrt{3}$.

10. Dados os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (1,-1,0)$, escreva as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) do plano determinado por A, B e C.

11. Determine as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) do plano π que passa por $A = (1,1,0)$, $B = (1,-1,-1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2,1,0)$.

12. Determine as equações (vetorial e paramétrica) do plano $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z - 1 = 0\}$.

13. Determine as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) do plano que passa pelo ponto $P = (1,1,2)$ e é paralelo ao plano $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z + 1 = 0\}$.

14. Determine as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) do plano que passa pelo ponto $P = (1,0,1)$ e é perpendicular à reta $r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (0,0,1) + \lambda(1,2,-1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

15. Dados o ponto $P = (1,1,1)$ e o vetor $\vec{n} = (2,1,3)$, determine as equações (cartesiana, vetorial e paramétrica) do plano que passe por P e que seja perpendicular à direção de $\vec{n}$.

16. Dados o ponto $P = (0,1,-1)$ e o plano $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 3\}$, determine as equações (vetorial e paramétrica) da reta que passa por P e que seja perpendicular a π.

17. Dados o plano $\pi = \{(x,y,z) = (1,1,3) + \lambda(1,-1,1) + \mu(0,1,3), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ e a reta $r = \{(x,y,z) = (1,1,1) + \alpha(3,2,1), \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$, verifique que r é transversal a π e ache o ponto P onde r fura π.

18. Escreva as equações (vetorial e paramétrica) da reta que é intersecção dos planos $\pi_1 = \{(x,y,z) = (1+\alpha, -2, -\alpha-\beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $\pi_2 = \{(x,y,z) = (1 + \lambda - \mu, 2\lambda + \mu, 3 - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

3 Problemas lineares

1. Claudete leu $\frac{3}{5}$ de um livro e ainda faltam 48 páginas para ela terminar de ler o livro todo. Quantas páginas ela já leu? Qual é o total de folhas que tem esse livro?

2. Numa danceteria, o convite para homens custava R\$ $20,00$ e para mulheres, R\$ $10,00$. Sabendo que o número de mulheres que foram à danceteria excede em 15 o número de homens e que, ao todo, foram arrecadados R\$ $960,00$, pergunta-se: qual é o número de homens que foram a essa danceteria?

3. Em um programa de TV, o participante começa com R\$ $500,00$. Para cada pergunta respondida corretamente, recebe R\$ $200,00$; e para cada resposta errada perde R\$ $150,00$. Se um participante respondeu todas as 25 questões formuladas e terminou com R\$ $600,00$, quantas questões ele errou?

4. (UFR-RJ) Uma empresa deseja embalar parafusos. Colocando-se 50 parafusos em cada caixa, usa-se um determinado número de caixas. Se forem colocados apenas 45 parafusos em cada caixa, serão necessárias mais 27 caixas para que não haja sobras. Calcule a quantidade de parafusos que a empresa deseja embalar.

5. (Obmep) Cururu é um sapo estranho; ele se desloca apenas com dois tipos de saltos:
Salto tipo I: 10 cm para Leste e 30 cm para Norte.
Salto tipo II: 20 cm para Oeste e 40 cm para Sul.
a) Como Cururu pode chegar a um ponto situado a 190 cm para Leste e 950 cm ao Norte de sua casa?
b) É possível Cururu chegar a um ponto situado a 180 cm a Leste e 950 cm ao Norte de sua casa?

6. (UF Ouro Preto-MG) Maria e sua irmã Vera foram com seu irmão mais novo à casa do seu tio. Lá, encontraram uma balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 70 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e seus pesos combinados foram:

   - Maria e Vera: 99 kg;
   - Maria e o irmão: 81 kg;
   - Vera e o Irmão: 74 kg.

   Determine o peso de cada um dos irmãos.

7. (FVG-SP) Os números reais x, y e z são tais que $x + y + z = 6$ e $3x + 4y + 2z = 17$.
a) Encontre uma solução do sistema formado por essas duas equações.
b) Determine todas as soluções do sistema.
c) Calcule o valor de $9x + 11y + 7z$.

8. (ITA-SP) Numa lanchonete o gasto de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta custam R\$ $31,50$. Já consumindo 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta, o custo é de R\$ $42,00$. Qual será o custo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta?

4 Sistemas lineares

1. (FUVEST) Determine todos os valores de m para os quais a equação $\frac{mx}{4} - \frac{(x-2)}{m} = 1$:

   (a) admite única solução;

   (b) não admite solução;

   (c) admite infinitas soluções.

2. Resolva os seguintes sistemas lineares de 2 equações e 2 incógnitas algebricamente e graficamente, classificando cada um deles em: sistema possível e determinado(SPD) se houver uma única solução; sistema possível e indeterminado(SPI) se houver infinitas soluções; ou sistema impossível (SI) se não houver soluções.

   (a)
   $$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

   (c)
   $$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$

   (d)
   $$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$$

3. Considere o sistema:
$$\begin{cases} x.\sin a - y.\cos a = b \\ x.\cos a + y.\sin a = c \end{cases}$$
Mostre que, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e determinado, e exiba a solução.

4. Resolva os seguintes sistemas lineares homogêneos de 3 equações e 3 incógnitas usando escalonamento, classificando em SPD, SPI ou SI. É possível um sistema linear homogêneo ser SI? Esboce as resoluções gráficas dos sistemas.

(a)
$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-4y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 4x+3y+z=0 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 5x+4y-2z=0 \\ x+8y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 3x+2y-12z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x-3y+5z=0 \end{cases}$$

5. Resolva os seguintes sistemas lineares usando escalonamento, classificando em SPD, SPI ou SI. Esboce as resoluções gráficas dos sistemas.

(a)
$$\begin{cases} x+y=1 \\ -2x+3y-3z=2 \\ x+z=1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 2a+b+c=-5 \\ -a+b-2c=7 \\ 3a-5b-4c=-15 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+y-z-t=0 \\ 2x+2z+t=-1 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+2y+z=2 \\ 2x-y-z-t=-1 \\ x-3y+z+2t=0 \end{cases}$$

6. Resolva os sistemas não-lineares, transformando-os em sistemas lineares:

(a)
$$\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{2x-y}{3z+2}=\frac{z+1}{2x+y}=1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \frac{x+2y}{-3u-1}=\frac{2x-y}{z-2u}=1 \\ \frac{x-2z}{u-y}=\frac{3u-1}{2z-y}=2 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 2^x.2^y.2^z=8 \\ 3^x.3^z=3^9.9^y \\ 125.5^x=5^z \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} 3^x.3^y.3^z=1 \\ \frac{2^x}{2^y.2^z}=4 \\ 4^{-x}.16^y.4^z=\frac{1}{4} \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} \log_2(x+y+z)=0 \\ \log_y(x+z)=1 \\ \log_3 5+\log_3 x=\log_3(y-z) \end{cases}$$

7. Resolva os sistemas lineares abaixo:

(a)
$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \\ 2x-5y=-1 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x+2y=11 \\ x+3y=16 \\ 2x+5y=27 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x-2y=8 \\ 3x-y=9 \\ x+y=1 \\ 5x+7y=-10 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x-y=7 \\ x+y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} -x+3y-z=1 \\ x+y+z=7 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} -x+y-2z=1 \\ 2x-y+3t=2 \\ x+2y+z-2t=0 \end{cases}$$

8. (ITA-SP) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-3y+z=1 \\ -2y+z=a \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x-by+3z=0 \end{cases}$$

   Se ambos admitem infinitas soluções, determine o valor de a e b.

9. Discuta os sistema lineares nas variáveis x, y e z em função dos parâmetros dados:

(a)

$$\begin{cases} x+2y=mx \\ my-2x=y \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x+3y=a \\ -x+y=b \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} 2x+3y=a \\ 2x+3y=b \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} 2x+3y=a \\ 2mx+3my=b \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} 5x=\lambda x \\ -3y=\lambda y \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} x+y=\lambda x \\ x-y=\lambda y \end{cases}$$

(g)

$$\begin{cases} x+2y-mz=-1 \\ 3x-y+z=4 \\ -2x+4y-2z=k \end{cases}$$

(h)

$$\begin{cases} x+y=a \\ -2x+3y-3z=b \\ x+z=c \end{cases}$$

(i)

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2x+y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$$

(j)

$$\begin{cases} 5x=\lambda x \\ -3y=\lambda y \\ 5z=\lambda z \end{cases}$$

(k)

$$\begin{cases} 5x=\lambda x \\ -3y=\lambda y \\ 2z=\lambda z \end{cases}$$

(l)

$$\begin{cases} x+y=\lambda x \\ 2x+y+z=\lambda y \\ x+z=\lambda z \end{cases}$$

(m)

$$\begin{cases} x+y+z=\lambda x \\ y+z=\lambda y \\ -2y+4z=\lambda z \end{cases}$$