Prova Substitutiva

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

23 de Fevereiro de 2018

Escolha 6 das 9 questões abaixo para resolver:

1. Sejam $n \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^n$, p um ponto de acumulação de A, $f\colon A \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L_1$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L_2$.

   Mostre que, se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$, então $L_1 \leq L_2$.

2. Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2\}$, isto é, C é a circunferência de centro em (a, b) e raio R.

   a) Parametrize C, definindo uma curva diferenciável $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuja imagem seja C e calcule $\gamma'(t)$;

   b) Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2\}$. D é aberto em $\mathbb{R}^2$? D é fechado em $\mathbb{R}^2$? Quem é a fronteira de D?

   c) Calcule a área de D, usando coordenadas polares.

3. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$, caso contrário.

   a) Mostre que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos;

   b) Mostre que f é diferenciável;

   c) Mostre que f é contínua;

   d) Dê a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(0, 0, 0)$;

   e) f é de classe $\mathcal{C}^1$?

4. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 4x^2 + y^2$.

   a) Calcule $\nabla f(-2, 1)$;

   b) Dê a equação da reta normal à curva de nível 17 de f no ponto $(-2, 1)$;

   c) Dê a equação da reta tangente à curva de nível 17 de f no ponto $(-2, 1)$;

   d) Faça um esboço da curva de nível, da reta tangente e da reta normal calculadas.

5. Seja $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = (x-1)^2 + 6(x-1)(y-2) + (y-2)^2 + 5(x-1) + 7(y-2) + 1$

   a) Dê a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 2, g(1, 2))$;

   b) Determine o polinômio de Taylor $P_1(x, y)$ de ordem 1 de f, em volta do ponto $(1, 2)$;

   c) Usando P_1, calcule um valor aproximado para $g(1.01, 1.9)$;

   d) Determine o polinômio de Taylor $P_2(x, y)$ de ordem 2 de g, em volta do ponto $(1, 2)$;

   e) Seja $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (1-t, 3t+2, g(1-t, 3t+2))$. Calcule $\gamma'(0)$;

   f) Calcule a equação da reta tangente à imagem de γ no ponto $\gamma(0)$.

6. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $p \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$ diferenciável, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $t_0 \in I$ e $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida no conjunto de nível $k = f(p)$ de f com $\gamma(t_0) = p$. Mostre que $\nabla f(p)$ é ortogonal ao vetor tangente $\gamma'(t_0)$.

7. a) Determine os pontos críticos de $f(x, y) = (2x-x^2)(2y-y^2)$ e classifique-os.

   b) Qual o ponto do plano $x+2y-z = 4$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?

8. a) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$

   b) Calcule o volume da esfera de raio $R > 0$ com centro na origem.

9. a) Sejam $[a, b]$ e $[c, d]$ intervalos não-degenerados e $g: [a, b] \to \mathbb{R}$, $h: [c, d] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Considere o retângulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ e defina $f: Q \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = g(x).h(y)$.

   Mostre que f é integrável e $\displaystyle\int\int_Q f dA = (\int_a^b g(t)dt)(\int_c^d h(t)dt)$

   b) Calcule $\displaystyle\int\int_Q \frac{\sin^2 x}{1+4y^2} dA$, sendo $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$

Justifique todas as suas afirmações. Boa prova!