UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Nome: Prova 2 **Nº USP:** ______

Disciplina: Cálculo no $\mathbb{R}^n$ **Turma:** ______

Curso: Verão 2018 **Professor:** Thiago

Assinatura: ______

Data: 06 / 02 / 2018 **Nota:** ______ (______)

1) a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^4) - x^2y^2 \cdot 2x}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$ e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y \cdot (x^2+y^4) - x^2y^2 4y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^4y - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

Logo, as derivadas parciais existem em todos os pontos e vale que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y \cdot (x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) f é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$. Para verificar a diferenciabilidade em $(0,0)$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k^2}{h^2+k^4} - 0 - (0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2}{h^2+k^4} \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot k = 0$, pois $\lim_{(h,k)\to(0,0)} k = 0$ e os outros fatores são limitados

$\left(0 \leq \frac{h^2}{h^2+k^4} \leq 1 \text{ e } -1 \leq \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1 \right)$. Logo f é diferenciável em $(0,0)$.

$\therefore f$ é diferenciável.

c) Como f é diferenciável, temos que f é contínua. ▪

2^a solução: f é contínua em $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Em $(0,0)$, temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}\cdot y^2 = 0 = f(0,0),$$

pois $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$ e $\frac{x^2}{x^2+y^4}$ é limitada $\left(0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^4} \leq 1 \right)$.

Logo, f é contínua em $(0,0)$. $\therefore$ f é contínua.

d) $z - f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)$

$z - 0 = (0,0)\cdot(x,y)$

$\boxed{z = 0}$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(0,0,0)$, pois f é diferenciável em $(0,0)$.

e) Um vetor normal ao plano acima é o vetor $\vec{k} = (0,0,1)$. Logo, a equação da reta normal ao gráfico de f em $(0,0,0)$ pode ser a equação vetorial da reta que passa por $(0,0,0)$ e tem direção $\vec{k}$:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + t\cdot(0,0,1) = (0,0,t)$$

Note que esta reta é o eixo z.

f) $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, pois $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2} =$

$= \frac{2x_0y_0^6}{(x_0^2+y_0^4)^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. Para $(x_0,y_0)=(0,0)$, vamos verificar se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$:

Note que a parábola $x = y^2$ passa por $(0,0)$ e pode ser parametrizada continuamente por $\gamma(t) = (t^2, t)$.

Como $\lim\limits_{t\to0} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) = \lim\limits_{t\to0} \frac{\partial f}{\partial x}(t^2,t) = \lim\limits_{t\to0} \frac{2t^2t^6}{(t^4+t^4)^2} = \lim\limits_{t\to0} \frac{2t^8}{4t^8} =$

$= \lim\limits_{t\to0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, temos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua em $(0,0)$.

g) $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, pois $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} =$

$= \frac{2x_0^2y_0(x_0^2-y_0^4)}{(x_0^2+y_0^4)^2} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Para $(x_0,y_0)=(0,0)$, vamos verificar se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\text{limitada}}{\frac{2x^2}{x^2+y^4}}\left(\overset{\text{limitada}}{\frac{x^2}{x^2+y^4}}\cdot y - \overset{\text{limitada}}{\frac{y^4}{x^2+y^4}}\cdot y\right) = 0$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$. $\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua.

h) f não é de classe $\mathcal{C}^1$, pois $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é contínua.

Note que f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2) $\boxed{1^a \text{ solução}}$: $w(t,u) = w(x(t,u), y(t,u)) = w(t\cos u, t\sin u) =$

$$= (t\cos u)^2 + (t\sin u)^2 + t\cos u \cdot t\sin u = t^2(\cos^2 u + \sin^2 u + \cos u \cdot \sin u) =$$

$$= t^2(1 + \cos u \sin u)$$

Logo, $\dfrac{\partial w}{\partial t}(t,u) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[t^2(1+\cos u \sin u)\right] = 2t(1+\cos u \cdot \sin u)$ e

$$\frac{\partial w}{\partial u}(t,u) = \frac{\partial}{\partial u}\left[t^2(1+\cos u \cdot \sin u)\right] = t^2(-\sin^2 u + \cos^2 u)$$

$\boxed{2^a \text{ solução}}$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = (2x+y)\cdot\cos u + (2y+x)\cdot\sin u =$$

$$= (2t\cos u + t\sin u)\cdot\cos u + (2t\sin u + t\cos u)\cdot\sin u = 2t\cos^2 u + t\sin u\cdot\cos u +$$
$$+ 2t\sin^2 u + t\sin u\cdot\cos u = 2t(\cos^2 u + \sin^2 u + \cos u\cdot\sin u) = 2t\cdot(1+\cos u\cdot\sin u)$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = (2x+y)\cdot(-t\sin u) + (2y+x)\cdot t\cos u =$$

$$= -(2t\cos u + t\sin u)\,t\sin u + (2t\sin u + t\cos u)\cdot t\cos u = -2t^2\cos u\sin u - t^2\sin^2 u +$$
$$+ 2t^2\sin u\cos u + t^2\cos^2 u = t^2(\cos^2 u - \sin^2 u)$$

$\boxed{3^a \text{ solução}}$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = (2x+y, 2y+x)\begin{pmatrix} \cos u & -t\sin u \\ \sin u & t\cos u \end{pmatrix}$$

$$= (2t\cos u + t\sin u, 2t\sin u + t\cos u)\begin{pmatrix} \cos u & -t\sin u \\ \sin u & t\cos u \end{pmatrix} = \left(2t(1+\cos u\cdot\sin u), t^2\cdot(\cos^2 u - \sin^2 u)\right)$$

③ a) $\nabla f(x,y) = (e^{-y}, -xe^{-y}+3)$

b) $\nabla f(1,0) = (e^{-0}, -1\cdot e^{-0}+3) = (1,2)$

c) $\vec{v} = \dfrac{(3,4)}{\|(3,4)\|} = \dfrac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{(3,4)}{5} = (3/5, 4/5)$

Como f é diferenciável, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot v = (1,2)\cdot(3/5, 4/5) =$

$= \dfrac{3}{5} + \dfrac{8}{5} = \dfrac{11}{5}$

d) A direção para a qual a derivada direcional no ponto $(1,0)$ é máxima é a direção do vetor gradiente em $(1,0)$, isto é, a direção de $\nabla f(1,0) = (1,2)$, ou ainda, a direção do versor unitário $\left(\dfrac{1}{\sqrt5}, \dfrac{2}{\sqrt5}\right)$.

e) O valor máximo é $\|\nabla f(1,0)\| = \sqrt5$.

Tomando $u = \dfrac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|} = \dfrac{(1,2)}{\sqrt5} = (1/\sqrt5, \tfrac{2}{\sqrt5})$, temos que

$\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot u = (1,2)\cdot(1/\sqrt5, \tfrac{2}{\sqrt5}) = \dfrac{1}{\sqrt5} + \dfrac{4}{\sqrt5} = \dfrac{5}{\sqrt5} = \sqrt5$.

④ a) $\nabla f(x,y) = (2x, 8y) \Rightarrow \Rightarrow \nabla f(2,1) = (4,8)$

b) Equação vetorial: $(x,y) = \; = (2,1) + t\cdot(4,8)$

Equação cartesiana: $y-1 = \frac{8}{4}(x-2) \Rightarrow y-1 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x-3 \Rightarrow y = 2x-3$

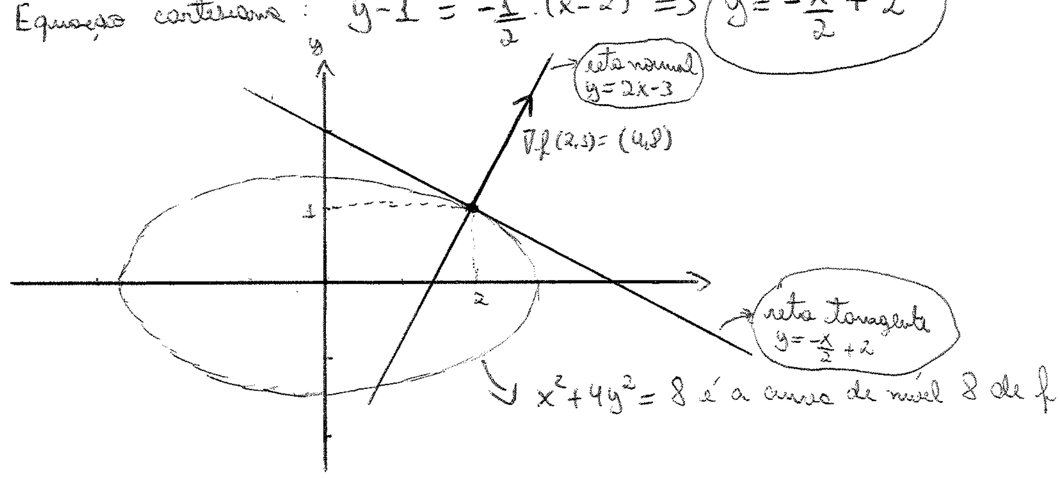
O vetor gradiente é o vetor gerador da reta normal, pois ele é perpendicular à curva de nível dada. $\vec{n} = \nabla f(2,1) = (4,8)$

c) O vetor $\vec{v} = (8,-4)$ é perpendicular a $\vec{n}$. Logo, a equação da reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$ pode ser a equação vetorial da reta que passa por $(2,1)$ e tem direção $\vec{v}$:

Equação vetorial: $(x,y) = (2,1) + t\cdot(8,-4)$

Equação cartesiana: $y-1 = -\frac{1}{2}\cdot(x-2) \Rightarrow y = -\dfrac{x}{2} + 2$

d)



(5) O correto enunciado seria com $(x-1)$ no lugar do $(x-2)$.

Vamos fazer cada item para $g(x,y)=(x-1)^2+2(x-1)(y+3)+(y+3)^2-5(x-2)+2(y+3)+1$

e para $h(x,y)=(x-1)^2+2\cdot(x-1)\cdot(y+3)+(y+3)^2-5\cdot(x-1)+2\cdot(y+3)+1$.

a₁) $g(1,-3)=6$ e $\nabla g(x,y)=\big(2(x-1)+2(y+3)-5,\ 2(x-1)+2\cdot(y+3)+2\big)$

$\nabla g(1,-3)=(-5,2) \Rightarrow z-6=-5\cdot(x-1)+2\cdot(y+3)$ ou $z=-5x+2y+17$ são as equações cartesianas do plano tangente ao gráfico de g em $(1,-3,6)$.

a₂) $h(1,-3)=1$ e $\nabla h(x,y)=\nabla g(x,y)$. Logo $\nabla h(1,-3)=(-5,2)$.

$z-1=-5\cdot(x-1)+2\cdot(y+3)$ ou $z=-5x+2y+12$ são as equações do plano tangente ao gráfico de h em $(1,-3,1)$.

b₁) $P_1(x,y)=g(1,-3)+\nabla g(1,-3)\cdot(x-1,y+3)=6+(-5,2)\cdot(x-1,y+3)=$

$=6-5\cdot(x-1)+2\cdot(y+3)$

b₂) $P_1(x,y)=1-5\cdot(x-1)+2\cdot(y+3)$

c₁) $g(1.1,-2.99)\cong P_1(1.1,-2.99)=6-5\cdot0.1+2\cdot0.01=5.52$

c₂) $h(1.1,-2.99)\cong P_1(1.1,-2.99)=1-5.0.1+2\cdot0.01=0.52$

d₁) $\boxed{1^a \text{ solução}}$ Como g é um polinômio de grau 2, temos que $P_2(x,y)=g(x,y)$

$\boxed{2^a \text{ solução}}$ $H(x,y)=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$ matriz Hessiana constante

$P_2(x,y)=P_1(x,y)+\frac{1}{2!}H(x,y)\cdot(x-1,y+3)^2=6-5(x-1)+2\cdot(y+3)+\frac{1}{2}\Big[2(x-1)^2+2\cdot2(x-1)(y+3)$

$+2\cdot(y+3)^2\Big]=6-5(x-1)+2\cdot(y+3)+(x-1)^2+2(x-1)(y+3)+(y+3)^2=g(x,y)$

d₂) $P_2(x,y)=1-5(x-1)+2\cdot(y+3)+(x-1)^2+2\cdot(x-1)(y+3)+(y+3)^2=h(x,y)$

e₁) $\gamma(0)=(1,-3,6)$ e $\frac{d}{dt}\Big[g(1-t,t-3)\Big]=\frac{\partial g}{\partial x}(1-t,t-3)\cdot(-1)+\frac{\partial g}{\partial y}(1-t,t-3)\cdot1$

Logo $\gamma'(0)=\left(-1,1,-\frac{\partial g}{\partial x}(1,-3)+\frac{\partial g}{\partial y}(1,-3)\right)=(-1,1,7)$

e₂) $\gamma(0)=(1,-3,1)$ e $\gamma'(0)=(-1,1,7)$

f₁) $(x,y,z)=\gamma(0)+s\gamma'(0)=(1,-3,6)+s\cdot(-1,1,7)$

f₂) $(x,y,z)=\quad=(1,-3,1)+s\cdot(-1,1,7)$

g₁) $\nabla g(0,0)=(-2+6-5,-2+6+2)=(-1,6)$ e $g(0,0)=21$

$Q_1(x,y)=g(0,0)+\nabla g(0,0)\cdot(x-0,y-0)=21+(-1,6)\cdot(x,y)=21-x+6y$

g₂) $\nabla h(0,0)=(-1,6) \Rightarrow Q_1(x,y)=16-x+6y$

$h(0,0)=16$

$h_1)$ $z - 21 = -1\cdot(x-0) + 6\cdot(y-0)$ ou $z = 21 - x + 6y$

$h_2)$ $z - 16 = -1\cdot(x-0) + 6\cdot(y-0)$ ou $z = 16 - x + 6y$

$i_1)$ $Q_2(x,y) = g(x,y)$ ou

$$Q_2(x,y) = 21 - x + 6y + \frac{1}{2}\left[2(x-0)^2 + 4(x-0)\cdot(y-0) + 2(y-0)^2\right] = 21 - x + 6y + x^2 + 2xy + y^2$$

$i_2)$ $Q_2(x,y) = l(x,y)$ ou

$$Q_2(x,y) = 16 - x + 6y + x^2 + 2xy + y^2$$

6 Seja $g = f\circ\gamma$. Então $g: I \to \mathbb{R}$ e $g(t) = f(\gamma(t))$.

Como a imagem de γ está contida na curva de nível K de f, segue que $g(t) = f(\gamma(t)) = K$, $\forall t \in I$, onde K é a constante $f(p)$.

Logo, $g'(t) = \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right] = \frac{d}{dt}\left[K\right]$, ou seja,

$$\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = 0,$$ isto é,

$\nabla f(\gamma(t))$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, $\forall t \in I$.

Tomando $t = t_0$, segue que $\nabla f(\gamma(t_0)) = \nabla f(p)$ é ortogonal a $\gamma'(t_0)$.