

Prova 2

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

06 de Fevereiro de 2018

1. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$, caso contrário.
 - a) Mostre que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos;
 - b) Mostre que f é diferenciável;
 - c) Mostre que f é contínua;
 - d) Dê a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(0, 0, 0)$;
 - e) Dê a equação da reta normal ao gráfico de f em $(0, 0, 0)$;
 - f) Em quais pontos $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua?
 - g) Em quais pontos $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua?
 - h) f é de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Sejam $w = w(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, $x = x(t, u) = t \cos u$ e $y = y(t, u) = t \sin u$. Calcule $\frac{\partial w}{\partial t}(t, u)$ e $\frac{\partial w}{\partial u}(t, u)$.
3. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$.
 - a) Calcule $\nabla f(x, y)$;
 - b) Calcule $\nabla f(1, 0)$;
 - c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0)$, onde v é o vetor unitário na direção e sentido de $(3, 4)$;
 - d) Qual é a direção para a qual a derivada direcional no ponto $(1, 0)$ é máxima?
 - e) Qual é o valor da derivada direcional máxima no ponto $(1, 0)$?
4. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.
 - a) Calcule $\nabla f(2, 1)$;
 - b) Dê a equação da reta normal à curva de nível 8 de f no ponto $(2, 1)$;
 - c) Dê a equação da reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2, 1)$;
 - d) Faça um esboço da curva de nível, da reta tangente e da reta normal calculadas.

5. Sejam $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = (x-1)^2 + 2(x-1)(y+3) + (y+3)^2 - 5(x-1) + 2(y+3) + 1$
- Dê a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, -3, g(1, -3))$;
 - Determine o polinômio de Taylor $P_1(x, y)$ de ordem 1 de f , em volta do ponto $(1, -3)$;
 - Usando P_1 , calcule um valor aproximado para $g(1.1, -2.99)$;
 - Determine o polinômio de Taylor $P_2(x, y)$ de ordem 2 de g , em volta do ponto $(1, -3)$;
 - Seja $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (1-t, t-3, g(1-t, t-3))$. Calcule $\gamma'(0)$;
 - Calcule a equação da reta tangente à imagem de γ no ponto $\gamma(0)$;
 - Determine o polinômio de Taylor $Q_1(x, y)$ de ordem 1 de g , em volta do ponto $(0, 0)$;
 - Dê a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(0, 0, g(0, 0))$;
 - Determine o polinômio de Taylor $Q_2(x, y)$ de ordem 2 de g , em volta do ponto $(0, 0)$.
6. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $p \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $t_0 \in I$ e $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável cuja imagem está contida no conjunto de nível $k = f(p)$ de f com $\gamma(t_0) = p$. Mostre que $\nabla f(p)$ é ortogonal ao vetor tangente $\gamma'(t_0)$.

Justifique todas as suas afirmações. Boa prova!