



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Nome: Priscila J Nº USP: _____

Disciplina: Cálculo no $\mathbb{R}^n$ Turma: _____

Curso: Vestib 2018 Professor: T. Diniz

Assinatura: _____

Data: 22 / 01 / 2018 Nota: _____

1) a) Várias respostas são possíveis. Um exemplo seria $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
 A é aberto, pois todo x seu ponto são interiores a A .

A não é fechado, pois seu complementar $\mathbb{R}^2 \setminus A = \mathcal{A}^c$ não é aberto, já que existem pontos em $\mathcal{A}^c$ que não são interiores a $\mathcal{A}^c$, como por exemplo $(1, 0)$ ou qualquer ponto de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = S^1$.

b) Várias respostas possíveis. Um exemplo seria $F = \{(0, 0, 0)\}$ e conjunto unitário contendo a origem.

F é fechado, pois seu complementar $F^c = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é aberto, uma vez que todo x seu ponto de F^c não interior a F^c .

F não é aberto, pois $(0, 0, 0)$ não é um ponto interior de F .

c) O conjunto dos pontos de acumulação de A é $A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.
Note que $(0, 0) \in A$, mas $(0, 0) \notin A'$, pois $(0, 0)$ é ponto isolado de A .

d) $[0, 1]$ não é aberto, pois 0 não é ponto interior de $[0, 1]$.
 $[0, 1]$ não é fechado, pois seu complementar $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ não é aberto, já que 1 não é ponto interior do complementar de $[0, 1]$.

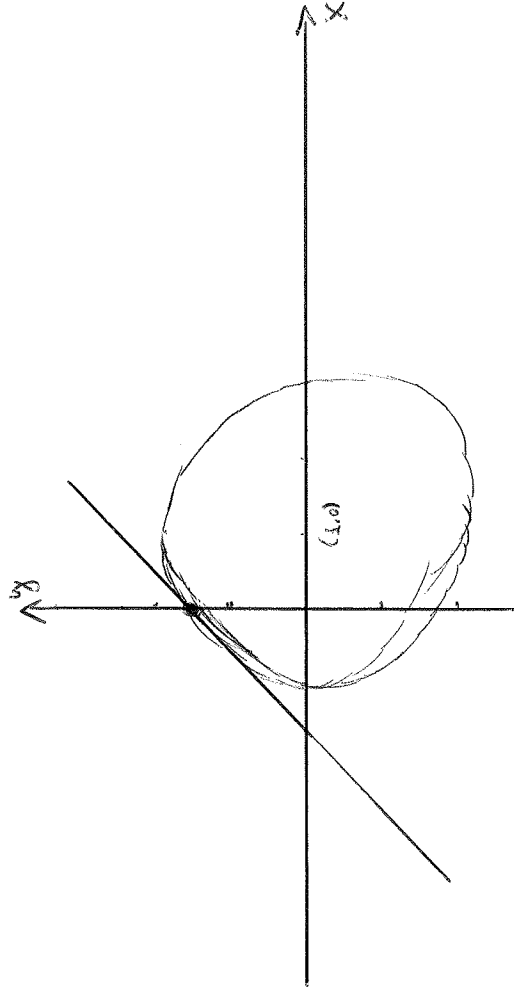
2) a) Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $x \in A$ com $0 < \|x - p\| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Tomando $\varepsilon_0 = L > 0$, temos que $\exists \delta_0 > 0$ tal que $x \in A$ com $0 < \|x - p\| < \delta_0$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon_0 = L$. Logo $|f(x) - L| < L$ e, portanto $f(x) \in]L - L, L + L[$, isto é, $f(x) \in]0, 2L[$, donde $f(x) > 0$, $\forall x \in A$ com $0 < \|x - p\| < \delta_0$.

b) Suponha $L_1 > L_2$. Seja $\varepsilon_0 = \frac{L_1 - L_2}{2} > 0$. Então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $0 < \|x - p\| < \delta_1$ implica $|f(x) - L_1| < \varepsilon_0$ e $0 < \|x - p\| < \delta_2$ implica $|g(x) - L_2| < \varepsilon_0$.

Logo, se $x \in A$ e $0 < \|x - p\| < \delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $f(x) \in]L_1 - \varepsilon_0, L_1 + \varepsilon_0[$ e $g(x) \in]L_2 - \varepsilon_0, L_2 + \varepsilon_0[$.
Portanto, $g(x) < L_2 + \varepsilon_0 = L_2 - \varepsilon_0 < f(x)$, $\forall x \in A$ com $0 < \|x - p\| < \delta_0$. Abusando, pois $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$, $\exists$ logo, $L_1 \leq L_2$.

③



a) Existem várias parametrizações possíveis. A parametrização mais canônica é:

$$\gamma(t) = (1 + 2 \cos t, 2 \sin t).$$

γ é diferenciável, pois suas coordenadas são diferenciáveis.

Im $\gamma = C$.

b) $\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$

c) $\gamma(t_0) = (0, \sqrt{3}) \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cos t_0 = 0 \\ 2 \sin t_0 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t_0 = -\frac{1}{2} \\ \sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow t_0 \in \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Tomamos $t_0 = \frac{2\pi}{3}$.

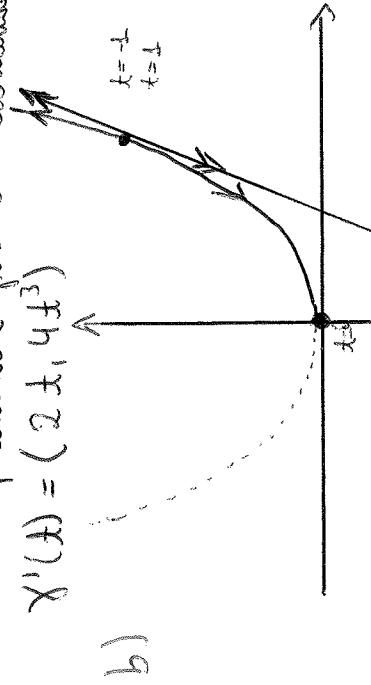
d) Equação vetorial: $(x, y) = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0) = (0, \sqrt{3}) + \lambda(-\sqrt{3}, -1)$

Equação paramétrica: $(x(\lambda), y(\lambda)) = (-\sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} - \lambda)$

Equação cartesiana: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - \sqrt{3} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$

④ a) γ é diferenciável pois suas coordenadas são diferenciáveis.

$$\gamma'(t) = (2t, 4t^3)$$



c) $\gamma(-1) = \gamma(1) = (1, 1)$

$$\gamma'(-1) = (-2, -4)$$

$$\gamma'(1) = (2, 4)$$

d) Equação vetorial: $(x, y) = (1, 1) + \lambda(-2, -4)$

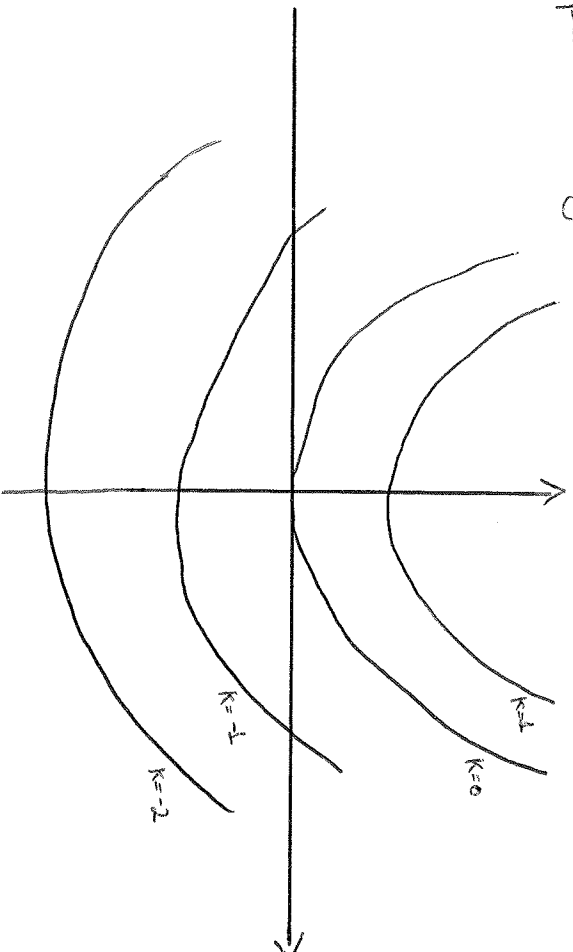
Equação cartesiana: $y - 1 = \frac{-4}{-2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$

e) A reta é a mesma do item (d)

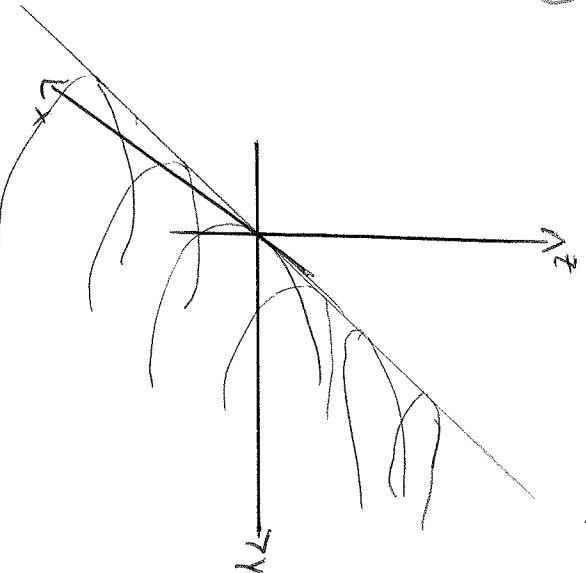
f) Como γ é diferenciável, só não existe reta tangente à imagem de γ nos pontos $\gamma(t)$ tais que $\gamma'(t) = (0, 0)$, isto é, $(2t, 4t^3) = (0, 0)$, ou $t = 0$.

Logo, não existe reta tangente à imagem de γ no ponto $\gamma(0) = (0, 0)$.

⑤ a) Para cada $K \in \mathbb{R}$, tem-se que a curva de nível K de f é a parábola $y = K + x^2$



b)



c) Verificar se satisfaz a condição. Por exemplo $\gamma(t) = (t, t^2 + 1)$

$$d) \gamma'(t) = (1, 2t)$$

$$\gamma'(t) \cdot (-2\gamma(t), 1) = (1, 2t) \cdot (-2t, 1) = 0 \Rightarrow \gamma'(t) \perp \nabla f(\gamma(t))$$

6) a) Se $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, temos que f é contínua em (x_0, y_0) ,

$$\text{pois } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{x_0^3 + y_0^3}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0).$$

$$\text{Para } (x_0, y_0) = (0, 0), \text{ temos que } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0 + 0 = 0 = f(0, 0),$$

já que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y^2$, e $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$ e $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$ são expressões limitadas entre 0 e 1.

Logo, f é contínua em $(0, 0)$.

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3 + 0}{(\Delta x)^2 + 0} - 0 = \frac{\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$$

7) a) Se $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, temos que f é contínua em (x_0, y_0) ,

$$\text{pois } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \frac{x_0^2 y_0^2}{x_0^4 + y_0^4} = f(x_0, y_0).$$

Para $(x_0, y_0) = (0, 0)$, note que a reta $y = x$ passa por $(0, 0)$ e pode ser parametrizada continuamente por $\gamma(t) = (t, t)$. Como $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t)}{2t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$,

temos que f não é contínua em $(0, 0)$.

Portanto, f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) Apesar de f não ser contínua em $(0, 0)$, temos que existe $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot (\Delta y)^2}{0 + (\Delta y)^4} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0$$