Prova 1

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

22 de Janeiro de 2018

1. $(1,5)$ Sobre a topologia de $\mathbb{R}^n$:

   a) Dê um exemplo de um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^2$ que seja aberto e não seja fechado. Justifique. Esboce se achar necessário.

   b) Dê um exemplo de um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^3$ que seja fechado e não seja aberto. Justifique. Esboce se achar necessário.

   c) Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 0 \text{ ou } 1 \leq x^2 + y^2 < 9\}$. Determine os pontos de acumulação de A.

   d) Explique por qual razão o intervalo $[0,1[$ não é nem aberto e nem fechado em $\mathbb{R}$.

2. $(2,0)$ Demonstre uma das seguintes propriedades sobre limtes:

   a) Sejam $n \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^n$, p um ponto de acumulação de A e $f\colon A \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$.

      Mostre que, se $L > 0$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in A$ com $0 < ||x - p|| < \delta_0$.

   b) Sejam $n \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^n$, p um ponto de acumulação de A, $f\colon A \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L_1$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$ com $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L_2$.

      Mostre que, se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in A$, então $L_1 \leq L_2$.

3. $(1,5)$ Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + y^2 = 2^2\}$, isto é, C é a circunferência de centro em $(1,0)$ e raio 2.

   a) Parametrize C, definindo uma curva diferenciável $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuja imagem seja C.

   b) Calcule $\gamma'(t)$.

   c) Encontre algum valor t_0 de $\mathbb{R}$ para o qual $\gamma(t_0) = (0, \sqrt{3})$ e calcule $\gamma'(t_0)$.

   d) Dê alguma equação da reta tangente à imagem de γ no ponto $(0, \sqrt{3})$.

4. $(2,0)$ Seja $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva dada por $\gamma(t) = (t^2, t^4)$.

   a) Mostre que γ é diferenciável e calcule $\gamma'(t)$.
   b) Esboce a imagem da curva γ, destacando o que achar necessário.
   c) Calcule as imagens $\gamma(-1)$ e $\gamma(1)$ e os vetores tangentes $\gamma'(-1)$ e $\gamma'(1)$.
   d) Dê as equações vetorial e cartesiana da reta tangente à imagem de γ no ponto $\gamma(-1)$.
   e) Ídem anterior no ponto $\gamma(1)$.
   f) Para quais valores de t em $\mathbb{R}$, não existe reta tangente à imagem de γ no ponto $\gamma(t)$. Explique.

5. $(2,0)$ Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -x^2 + y$

   a) Faça um esboço dos conjuntos de nível de f, contido em $\mathbb{R}^2$.
   b) Faça um esboço do gráfico de f, contido em $\mathbb{R}^3$.
   c) Defina $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ de maneira que $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva diferenciável cuja imagem seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -x^2 + y = 1\}$, o conjunto de nível 1 de f.
   d) Para γ do ítem anterior, calcule $\gamma'(t)$ e mostre que $\gamma'(t)$ é ortogonal a $(-2\gamma_1(t), 1)$, para todo t em $\mathbb{R}$.
   Observação.: Isso ocorre pois $(-2\gamma_1(t), 1)$ é o vetor gradiente de f no ponto $\gamma(t)$.

6. $(1,5)$ Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   a) Determine os pontos onde f é contínua. Justifique.
   b) Calcule, caso exista, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$. Justifique.

7. $(1,5)$ Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   a) Determine os pontos onde f é contínua. Justifique.
   b) Calcule, caso exista, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}$. Justifique.

Boa prova!