

Lista 5

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Fevereiro de 2018

1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

- a) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
- b) $f(x, y) = x^2y^2$
- c) $f(x, y) = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$
- d) $f(x, y) = x^3y^3$
- e) $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$
- f) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

2. Considere a função $f_a(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$

- a) Determine os valores de a para os quais f_a tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
- b) Determine os valores de a para os quais f_a tenha exatamente dois pontos de sela e um ponto de mínimo local;
- c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual f_a tenha ao menos um ponto de máximo local?
- d) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual f_a tenha mais de 3 pontos críticos?

3. Esboce a região $D \subset \mathbb{R}^2$ e determine o máximo e o mínimo absolutos de f na região D .

- a) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$ e D é o triângulo (com interior e lados inclusos) cujos vértices são $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$;
- b) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$;
- c) $f(x, y) = xy$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1, x \in [1, 2]\}$;
- d) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, x \in [0, \frac{1}{4}], y \geq 0\}$;

4. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições dadas:

- a) $f(x, y) = xy$, sujeito a $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$;
- b) $f(x, y) = x^3y$, sujeito a $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$;

- c) $f(x, y, z) = xyz$, sujeito a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$;
- d) $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$, sujeito a $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$;
- e) $f(x, y, z) = x - z$, sujeito a $x^2 + y^2 - z = 0$ e $z - 2y = 0$;
- f) $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeito a $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $4x + 4y - z^2 = 0$;
- g) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, sujeito a $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ e $x + y + z - 1 = 0$.
5. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z$. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f na região D para:
- a) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$;
- b) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;
- c) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq \frac{1}{2}\}$;
- d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \frac{1}{2}\}$;
- e) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq x + y\}$;
6. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f na região D para:
- a) $f(x, y, z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$
e $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$;
- b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$
e $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
7. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.
8. Qual o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?
9. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.
10. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$.
11. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, inscrito no elipsóide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.
12. Determine a equação do plano que passa por $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.
13. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.
14. É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? Verifique que $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais.