Lista 4

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Fevereiro de 2018

1. Calcule $\frac{\partial w}{\partial t}(t,u)$ e $\frac{\partial w}{\partial u}(t,u)$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial:

   a) $w = w(x,y) = x^2 + y^2$, $x = x(t,u) = t^2 + u^2$ e $y = y(t,u) = 2tu$

   b) $w = w(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $x = x(t,u) = t\cos u$ e $y = y(t,u) = t\sin u$

2. Seja $u = u(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v = v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Mostre que $v_{rr}(r,\theta) + \frac{v_r(r,\theta)}{r} + \frac{v_{\theta\theta}(r,\theta)}{r^2} = \triangle u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, onde $\triangle u = u_{xx} + u_{yy}$ é o Laplaciano de u.

3. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t)$. Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g em $(1, g(1))$ seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

4. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0,2))$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uf(\sin(u^2 - v^3), 2u^2v)$. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g em $(1, 1, g(1,1))$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

5. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

6. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ em um ponto $p = \gamma(t_0)$ com $t_0 > 0$. Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém p, no ponto p.

7. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável e $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2)$ uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f. Seja r a reta tangente à curva de nível 4 de f no ponto $(2,8)$. Sabendo que a reta r contém o ponto $(1,-4)$, determine o vetor gradiente de f no ponto $(2,8)$ e a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 8, f(2,8))$.

8. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável e $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$. Sabendo que a imagem da curva γ está contida em um conjunto de nível de f e que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(-1,-4)$, sendo $\overrightarrow{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

9. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. A função f é diferenciável em $(0,0)$?

10. Ache a derivada direcional (em relação a vetores unitários) máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$ em $(1,0)$ b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ em $(1,2)$

11. Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a direção de maior variação da função $f(x,y) = x^2+y^2-2x-4y$ é a do vetor $(1,1)$.

12. Sejam $A \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $V\colon A \to \mathbb{R}$ um potencial elétrico dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$

    a) Ache a taxa de variação do potencial em $p = (3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
    b) Qual a direção e sentido em que a taxa do potencial elétrico, em p, é a maior possível? E a menos possível?
    c) Qual o valor dessa taxa máxima?

13. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

14. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1,1,2)$, isto é, eles têm o mesmo plano tangente nesse ponto.

15. Sejam $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $(1,1)$.

    a) Mostre que $|f(x,y) - P_1(x,y)| < 5(x-1)^2 + 6(y-1)^2$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $|x-1| < 1$ e $|y-1| < 1$.
    b) Usando $P_1(x,y)$, calcule um valor aproximado para $f(1.001, 0.99)$ e estime o erro cometido com essa aproximação.

16. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 8$.

    a) Determine o polinômio de Taylor $P_1(x,y)$ de ordem 1 de f, em volta do ponto $(1,1)$.
    b) Escreva a fórmula de Taylor para o resto $E_1(x,y) = f(x,y) - P_1(x,y)$.
    c) Determine o polinômio de Taylor $P_2(x,y)$ de ordem 2 de f, em volta do ponto $(1,1)$.
    d) Escreva a fórmula de Taylor para o resto $E_2(x,y) = f(x,y) - P_2(x,y)$.