Lista 2

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Janeiro de 2018

1. Para cada função $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n$ dada abaixo, determine A, o domínio maximal onde f pode estar definida e o esboce.

   a) $f(x) = 17$
   b) $f(x) = \sin x$
   c) $f(x,y) = 17$
   d) $f(x,y) = 1 - x - y$
   e) $f(x,y,z) = x + y + z$
   f) $f(x,y) = xy$
   g) $f(x,y) = (x-y)^2$
   h) $f(x,y) = y^2 + 1$
   i) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$
   j) $f(x,y) = y^2 - x^2$
   k) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$
   l) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
   m) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2$
   n) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+1}$
   o) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$
   p) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y^2}$
   q) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$
   r) $f(x,y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$
   s) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
   t) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$
   u) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$
   v) $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$
   w) $f(x,y) = \tan(x-y)$
   x) $f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y})$

2. Encontre uma família de conjuntos de nível para cada ítem do exercício anterior, destacando se estes conjuntos são curvas, ou superfícies, ou nenhum deles.

3. Esboce o gráfico das funções de duas ou menos variáveis do exercício 1 acima.

4. Calcule os limites $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ quando existirem. Justifique cada passo, existindo ou não os limites.

   a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
   b) $f(x,y) = \frac{x^2 y \cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
   c) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
   d) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{2x^4+x^2y+y^2}$
   e) $f(x,y) = \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$
   f) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

g) $f(x,y) = \frac{xy}{x^3-y}$

h) $f(x,y) = \frac{x^4\sin(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

i) $f(x,y) = \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

j) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\sin(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})$

k) $f(x,y) = \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

l) $f(x,y) = \frac{x^3+\sin(x^2+y^2)}{y^4+\sin(x^2+y^2)}$

m) $f(x,y) = \frac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$

n) $f(x,y) = \frac{x^3[1-\cos(x^2+y^2)]}{(x^2+y^2)^3}$

o) $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

p) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

q) $f(x,y) = x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan(\frac{1}{y^2-x^2})$

r) $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}\sin(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}})$

5. Para cada ítem do exercício acima, decida se existe um número real L de tal forma que $f(0,0) = L$ faça com que f seja contínua na origem.

6. Calcule os limites quando existirem. Justifique cada passo, existindo ou não os limites.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2\ln(3x^2+y^2)\arctan(\frac{1}{y^2-x^2})$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{zy^2(e^{x+y+z})}{x^2+y^2+z^2}\cos(x+y+z)$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z,w)\to(0,0,0,0)} \frac{xyzw}{x^4+y^4+z^4+w^4}$

d) $\displaystyle\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{\sin(x_1^2+\ldots+x_n^2)}{x_1^2+\ldots+x_n^2}$

7. Determine os pontos de continuidade da função $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(0,0)=1$, $f(1,1)=0$ e $f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)([x-1]^2+[y-1]^2)}$, se $(x,y)\neq(0,0)$ e $(x,y)\neq(1,1)$.