Lista 1

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Janeiro de 2018

1. Sobre retas e planos:

   a) Determine as equações cartesiana e vetorial da reta que passa por $(1,-2)$ e que é perpendicular à reta de equação $2x+y=3$;

   b) Determine as equações cartesiana e vetorial da reta que passa por $(1,-2)$ e que é paralela à reta de equação $2x+y=3$;

   c) Determine a equação vetorial da reta que passa por $(2,1,-1)$ e que é perpendicular ao plano de equação $2x+y+3z=1$;

   d) Determine as equações cartesiana e vetorial do plano que passa por $(1,1,1)$ e que é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n}=(2,1,3)$;

   e) Determine as equações cartesiana e vetorial do plano que passa por $(1,2,1)$ e que é paralelo aos vetores $\overrightarrow{u}=(-1,1,2)$ e $\overrightarrow{v}=(2,1,-1)$.

2. Sejam $u,v\in\mathbb{R}^n$, mostre que $u\perp v \Leftrightarrow ||u+v||^2=||u||^2+||v||^2$. (Pitágoras)

3. Dados $u=(a_1,b_1,c_1), v=(a_2,b_2,c_2)\in\mathbb{R}^3$, definimos o *produto vetorial* de u por v como:

$$u\wedge v=(b_1c_2-c_1b_2, a_2c_1-a_1c_2, a_1b_2-a_2b_1)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

   Mostre que, se u e v são não nulos e θ é o ângulo entre u e v, então $||u\wedge v||=||u||||v||\sin\theta$. (Lembre-se que $\cos\theta=\frac{u\cdot v}{||u||||v||}$)

4. Decida se A é aberto, ou fechado, ou simultaneamente aberto e fechado ou nem aberto e nem fechado.

   a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2<9\}$

   b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\in\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q}\}$

   c) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}, z\in\mathbb{Z}\}$

   d) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; |x|>1 \text{ e } |y|>1\}$

   e) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0<x^2+y^2\leq 9\}$

   f) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y=x^2\}$

g) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y < 2\}$

h) $A = \{x \in \mathbb{R}; 0 < \sin x \leq 9\}$

5. Encontre os pontos de acumulação de A, para cada A do exercício anterior.

6. Desenhe as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso:

   a) $\gamma(t) = (1, t), t \in \mathbb{R}$

   b) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t), t \in [-2, 0]$

   c) $\gamma(t) = (1, t, 1), t \in \mathbb{R}$

   d) $\gamma(t) = (t(t^2 - 3), 3(t^2 - 3)), t \in \mathbb{R}$

   e) $\gamma(t) = (\sin t, \cos t), t \in \mathbb{R}$

   f) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2), t \in \mathbb{R}$

   g) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4 \sin t), t \in [-\pi, \pi]$

   h) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t), t \in \mathbb{R}$

   i) $\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2} \cos t), t \in [0, 2\pi]$

   j) $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t), t \in \mathbb{R}$

   k) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \in \mathbb{R}$

   l) $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, 2), t \in \mathbb{R}$

   m) $\gamma(t) = (2 + e^{-t}, 3 - e^{-t}), t \in \mathbb{R}$

   n) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$

   o) $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t), t \in \mathbb{R}$

   p) $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

7. Parametrize e esboce cada conjunto C como imagem de uma curva $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ para algum intervalo I:

   a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$

   b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1, x < 0 \text{ e } y > -10\}$

   c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$

   d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$

8. Encontre a equação $\overrightarrow{x}(t) = \gamma(t) + \lambda\gamma'(t), \lambda \in \mathbb{R}$ da reta tangente à imagem da curva no ponto $\gamma(t)$ para os valores de t tais que existe o vetor tangente $\gamma'(t) \neq \overrightarrow{0}$, para cada ítem dos dois exercícios anteriores.

9. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = r$, para todo t em I, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo t em I. Vale a recíproca? Interprete.