Lista 0 - A

Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Janeiro de 2018

1. Calcule cada limite:

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

   b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)\sin(3x)}{x^2}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(x)}$

   e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{2x}}{\ln(3x+1)}$

   f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(1+2xe^x)}{2x}$

   g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

2. Sejam $a > 0$ e $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, se $x \neq a$, e $f(x) = L$, se $x = a$. Determine L de modo que f seja contínua.

3. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - b$, se $x < 2$, e $f(x) = ax^2 - 1$, se $x \geq 2$.

   a) Para quais valores de a e b, f é contínua?

   b) Para quais valores de a e b, f é derivável?

4. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, se $x \leq 0$, e $f(x) = 3x$, se $x > 0$.

   a) Mostre que f é inversível e encontre f^{-1}.

   b) Em quais pontos f é contínua? Em quais pontos f é derivável?

   c) Em quais pontos f^{-1} é contínua? Em quais pontos f^{-1} é derivável?

5. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$, se $x \neq 0$, e $f(x) = 0$, se $x = 0$.

   a) Mostre que f é derivável em todos os pontos e encontre f'.

b) f é de classe $\mathcal{C}^1$?

6. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em 0 e com $f(0) = 0$. Prove que existe $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em 0 tal que $f(x) = xg(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Calcule f'' para:

   a) $f(x) = \cos(\sin(2x))$

   b) $f(x) = \sqrt{1 + \cos^4 x}$

8. Dê a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p)$ para:

   a) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ e $p = 1$

   b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x + \cos x$ e $p = \frac{\pi}{4}$

9. Dada a parábola $y = x^2 - 7x + 3$, determine em que ponto da curva, a reta tangente é paralela à reta $5x + y - 3 = 0$.

10. Seja $f\colon [-2, \frac{5}{2}] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$, se $x \in [-2, 1]$, e $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$, se $x \in]1, \frac{5}{2}]$.

    a) Em quais pontos f é contínua? Em quais pontos f é derivável?

    b) Dê os valores máximo e mínimo da função e os pontos onde são assumidos.

11. Esboce o gráfico de f, estudando-o com relação a crescimento, decrescimento, máximos e mínimos locais, concavidades e pontos de inflexão, limites necessários e retas assíntotas para:

    a) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

    b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$

12. Um arame deve ser cortado em 3 partes. Uma delas será dobrada em quadrado e as outras em forma circular de mesmo raio. Determine como cortar o arame de forma que a soma das áreas delimitadas seja mínima.

13. Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade. Admita que o movimento deles é continuamente derivável.

14. Sejam I um intervalo aberto, $a \neq b \in I$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ contínua com $f(a) = f(b)$. Mostre que, se existem $f'(a) > 0$ e $f'(b) > 0$, então existe c entre a e b tal que $f(c) = f(a)$.

15. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro:

    a) $\sqrt[3]{8,2}$

    b) $\ln(1,3)$

    c) $\sin(0,1)$