



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

① Mostre que a composta de funções contínuas é uma função contínua.

Sejam (M, d_M) , (N, d_N) e (P, d_P) espaços métricos e $g: M \rightarrow P$ e $f: P \rightarrow N$ ~~funções~~ funções contínuas. Vamos mostrar que $f \circ g: M \rightarrow N$ também é uma função contínua.

Seja $a \in M$. Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua em $g(a)$, existe $\varepsilon > 0$ tq. $d_P(y, g(a)) < \varepsilon$ implica em $d_N(f(y), f(g(a))) < \varepsilon$.

Como g é contínua em a , existe $\delta > 0$ tq. $d_M(x, a) < \delta$ implica em $d_P(g(x), g(a)) < \varepsilon$.

Logo, $d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_P(g(x), g(a)) < \varepsilon \Rightarrow d_N(f \circ g(x), f \circ g(a)) < \varepsilon$.

Portanto, $f \circ g$ é contínua em a . Logo $f \circ g$ é contínua.

② Considere $C = \{1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ munido da métrica usual induzida por $\mathbb{R}$ e (M, d) um espaço métrico. Mostre que uma sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M é convergente para um ponto $a \in M$ se, e somente se, a função $f: C \rightarrow M$, definida por $f(1/n) = X_n$ e $f(0) = a$, é contínua.

Note que $1/n$ é um ponto isolado de C ~~para~~ $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, f é contínua em $1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, qualquer que seja a função f . Logo, basta considerarmos a continuidade de f em 0 .

($\Rightarrow$) Se $X_n \rightarrow a$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq n_0 \Rightarrow d(X_n, a) < \varepsilon$.

Para mostrarmos que f é contínua em 0 , tome $\varepsilon > 0$. Como $X_n \rightarrow a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq n_0 \Rightarrow d(X_n, a) < \varepsilon$. Tome $\delta = 1/n_0 > 0$.

Então $d_C(z, 0) < \delta \Rightarrow d(1/n, 0) < 1/n_0 \Rightarrow |1/n - 0| < 1/n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \Rightarrow n > n_0 \Rightarrow d(f(z), f(0)) = d(f(1/n), a) = d(X_n, a) < \varepsilon$

Logo, f é contínua em 0 .



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

($\Leftarrow$) Se f é contínua em 0 , $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq. $|z - 0| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow d(f(z), f(0)) < \varepsilon$. Para mostrarmos que $X_n \rightarrow a$, tome $\varepsilon > 0$.
Como f é contínua, $\exists \delta > 0$ tq. $|z - 0| < \delta \Rightarrow d(f(z), f(0)) < \varepsilon$.

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > \frac{1}{\delta}$ (é possível, pela propriedade arquivista-

divisa de $\mathbb{R}$). Então $n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{n} < \delta \Rightarrow$

$|1/n - 0| < \delta \Rightarrow d(f(1/n), f(0)) < \varepsilon \Rightarrow d(X_n, a) < \varepsilon$
Logo, $X_n \rightarrow a$.

③ Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Dada uma função $f: M \rightarrow N$, mostre que são equivalentes:

(a) f é contínua; (b) $f^{-1}[F]$ é fechado, $\forall$ fechado $F \subseteq N$; (c) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}, \forall A \subseteq M$.

Vamos mostrar que (a) $\Leftrightarrow$ (b) e (a) $\Leftrightarrow$ (c)

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja F um fechado de N . Então $F^c = N \setminus F$ é um aberto de N . Como f é contínua, $f^{-1}[F^c]$ é um aberto de M . Logo, $f^{-1}[F] = M \setminus f^{-1}[F^c] = (f^{-1}[F^c])^c$ é um fechado de M , pois é o complementar de um aberto de M .

(b) $\Rightarrow$ (a) Sabemos que f é contínua se, e somente se, $f^{-1}[A]$ é um aberto de $M, \forall A \subseteq N$ aberto.

Seja $A \subseteq N$ aberto. Então $A^c = N \setminus A$ é um fechado de N . Como vale (b), temos que $f^{-1}[A^c] = f^{-1}[N \setminus A] = M \setminus f^{-1}[A] = (f^{-1}[A])^c$ é um fechado de M . Logo, $f^{-1}[A] = M \setminus f^{-1}[A^c]$ é um aberto de M e, portanto, f é contínua.

(a) $\Rightarrow$ (c) Dado $A \subseteq M$, vamos mostrar que $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Tome $y \in f(\bar{A})$. Então $\exists x \in \bar{A}$ tq. $f(x) = y$. Logo, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ com $x_n \rightarrow x$. Como f é contínua, temos que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq f(A)$ converge para $f(x) = y$, e, portanto, $y \in \overline{f(A)}$.
 $\therefore f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}, \forall A \subseteq M$.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

(c) $\Rightarrow$ (a) Sabemos que f é contínua em $a \in M$ se, e somente se, $X_n \rightarrow a \Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(a)$. [EX. 6]

Sejam $a \in M$ e $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ com $X_n \rightarrow a$. Vamos mostrar que $f(X_n) \rightarrow f(a)$. Seja $S = \text{Im}(X_n) = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$. Claro que $a \in \bar{S}$, mas não necessariamente $a \in S' = \{b \in M; b \text{ é ponto de acumulação de } S\}$. Se $a \notin S'$, como $X_n \rightarrow a$, teríamos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seria finalmente constante, i.e., existiria $m \in \mathbb{N}$ tq. $X_n = a, \forall n \geq m$ e, portanto, $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ seria também finalmente constante (e igual a $f(a)$), pois $n \geq m \Rightarrow X_n = a \Rightarrow f(X_n) = f(a)$ e, portanto, $f(X_n) \rightarrow f(a)$.

Se $a \in S'$, considere o conjunto $A = S \setminus \{a\}$ (se $a \notin S$, $A = S$). Como $a \in S'$, temos que $a \in \overline{S \setminus \{a\}} = \bar{A}$. Como vale (c), temos que $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ e, portanto, $a \in \bar{A} \Rightarrow f(a) \in f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]} \Rightarrow f(a) \in \overline{f[A]}$.

Se $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ não tende para $f(a)$, $\exists \bar{\epsilon} > 0$ tq. $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ tq. $d_n(f(X_n), f(a)) \geq \bar{\epsilon}$. Seja $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente de naturais tais que $d_n(f(X_{n_k}), f(a)) \geq \bar{\epsilon}, \forall k \in \mathbb{N}$. Logo, $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e, portanto, converge para a , mas a sequência $(f(X_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ não converge para $f(a)$.

Seja $B = \{X_{n_k}; k \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. Então: ~~Então:~~
 $\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k} = a \Rightarrow a \in \bar{B} \Rightarrow f(a) \in \overline{f(B)} \Rightarrow f(a) \in \overline{f(B)}$.

Mas $d(f(b), f(a)) \geq \bar{\epsilon}, \forall b \in B$, logo $f(a) \notin \overline{f(B)}$.

Aburrido!

Logo, $f(X_n) \rightarrow f(a)$ e, portanto, f é contínua em a .



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

4) Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Seja $f: M \rightarrow N$ uma isometria, isto é, uma função sobrejetora tal que $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$, $\forall x, y \in M$. Mostre que
(a) f é injetora; (b) f^{-1} também é uma isometria; (c) f é contínua.

(a) $f(x) = f(y) \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow d_M(x, y) = d_N(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$. $\therefore f$ é injetora.

(b) $f^{-1}: N \rightarrow M$ e $d_M(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) \underset{f \text{ é isometria}}{=} d_N(f(f^{-1}(a)), f(f^{-1}(b))) = d_N(a, b)$, $\forall a, b \in N$. $\therefore f^{-1}$ é uma isometria.

(c) f é uniformemente contínua, pois dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \varepsilon$ e temos que $d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y) < \delta = \varepsilon$.
 $\therefore f$ é contínua.

5) Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, $A \subseteq M$ e $f: M \rightarrow N$. Prove ou dê contraexemplo:

(a) Se $f: M \rightarrow N$ é contínua em todo ponto de A , então $f|_A: A \rightarrow N$ é uma função contínua.

$f|_A: A \rightarrow N$, $f: M \rightarrow N$ e $i_A: A \rightarrow M$
 $x \mapsto f(x)$ $x \mapsto f(x)$ $x \mapsto x$

Então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f|_A} & N \\ & \searrow i_A & \nearrow f \\ & M & \end{array}$$

, isto é,

$f|_A = f \circ i_A$. Como f e i_A são contínuas, segue que $f|_A$ também é uma função contínua.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

(b) Se $f|_A: A \rightarrow N$ é uma função contínua, então $f: M \rightarrow N$ é contínua em todo ponto de A .

Contraexemplo: $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($f = \chi_{\mathbb{Q}}$)
$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

f é descontínua em todos os pontos (de A ou de $M \setminus A$), mas $f|_A$ é contínua, pois é constante. $f|_A: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 1$

⑥ Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, $a \in M$ e $f: M \rightarrow N$. Mostre que f é contínua em a se, e somente se, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a implique em $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para $f(a)$.

Suponha f contínua em a e uma sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $X_n \rightarrow a$. Vamos mostrar que $f(X_n) \rightarrow f(a)$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como f é contínua em a , $\exists \delta > 0$ tq. $d_M(z, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(z), f(a)) < \varepsilon$. Como $X_n \rightarrow a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $n \geq n_0 \Rightarrow d_M(X_n, a) < \delta$.

Logo, $n \geq n_0 \Rightarrow d_M(X_n, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(X_n), f(a)) < \varepsilon$

Portanto, $f(X_n) \rightarrow f(a)$.

Suponha que $X_n \rightarrow a \Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(a)$ e vamos mostrar que f é contínua em a .

Suponha, por absurdo, que f não é contínua em a . Então $\exists \varepsilon > 0$ tq. $\forall \delta > 0, \exists X_\delta \in B_\delta(a)$ com $d_N(f(X_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$. Tomando $\delta_n = 1/n > 0$, obtemos $X_n \in B_{\delta_n}(a)$ com $d_N(f(X_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Logo, $X_n \rightarrow a$, mas

$f(X_n)$ não tende para $f(a)$. Absurdo!

Portanto, f é contínua em a .



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

7) Sejam (M, d_M) um espaço métrico, $\varphi: M \rightarrow M$ contínuo e uma sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $X_0 \in M$ qualquer e $X_{n+1} = \varphi(X_n)$. Mostre que, se $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $a \in M$, então a é um ponto fixo de φ .

$$X_n \rightarrow a \Rightarrow \varphi(a) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \varphi \text{ é contínuo em } a}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = a$$

$(X_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, logo tem o mesmo limite.

$\therefore X_n \rightarrow a \Rightarrow a$ é ponto fixo de φ .

8) Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Mostre que

$$\overline{X} = M \setminus \text{int}(M \setminus X) \text{ e } \text{int}(X) = M \setminus \overline{(M \setminus X)}$$

$$\overline{X} = \{a \in M; \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \cap B_\varepsilon(a)\} \text{ e}$$

$$\text{int}(M \setminus X) = \{a \in M; \exists r > 0 \text{ tq. } B_r(a) \subseteq (M \setminus X)\}$$

Se $a \in \overline{X}$, $\forall \varepsilon > 0$, $X \cap B_\varepsilon(a) \neq \emptyset$, logo $\nexists r > 0$ tq. $B_r(a) \subseteq M \setminus X$,
 $\underbrace{X \cap B_r(a) \neq \emptyset}_{X \cap B_r(a) \neq \emptyset}$

portanto, $a \notin \text{int}(M \setminus X)$. $\therefore \overline{X} \subseteq M \setminus \text{int}(M \setminus X)$

Se $a \in M \setminus \text{int}(M \setminus X)$, $a \notin \text{int}(M \setminus X)$, logo $\nexists r > 0$ tq. $B_r(a) \subseteq M \setminus X$ e,

portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $X \cap B_\varepsilon(a) \neq \emptyset$, isto é, $a \in \overline{X}$. $\therefore M \setminus \text{int}(M \setminus X) \subseteq \overline{X}$

Logo, $\overline{X} = M \setminus \text{int}(M \setminus X)$.

Para obter a segunda relação, use a primeira para o conjunto $M \setminus X$.

$$\text{Segue que } M \setminus \overline{(M \setminus X)} = M \setminus (M \setminus \text{int}(M \setminus (M \setminus X))) = M \setminus (M \setminus \text{int}(X)) = \text{int}(X).$$



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

9) Dê exemplo de um espaço com duas métricas não-discretas e não-equivalentes. Dê outro exemplo de um espaço com duas métricas não-discretas e equivalentes.

EXEMPLO 1:

Sejam $a < b$ em $\mathbb{R}$ e $M = \mathcal{C}_0([a, b], \mathbb{R}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua e limitada}\}$ (Note que, como $[a, b]$ é compacto, vale que $\mathcal{C}_0([a, b], \mathbb{R}) = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$).

Considere duas métricas em M :

$$d(f, g) = \sup \{ |f(x) - g(x)|; x \in [a, b] \} (= \max \{ \}) \text{ e}$$

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$\text{Como } d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \int_a^b d(f, g) dx = (b-a) \cdot d(f, g), \text{ temos}$$

$\searrow$ constante

que $d_1 \leq d$, isto é, d é mais fina que d_1 . Mas d e d_1 não são equivalentes, pois d_1 não é mais fina que d . Para ver isso, note que $\text{Id}: (M, d_1) \rightarrow (M, d)$ não é contínua, uma vez, que tomando

$$f \rightarrow f$$

$$(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \text{ definidas por } g_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ e}$$
$$x \mapsto g_n(x) = \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^n$$

$g \in M$ dada por $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (isto é, $g \equiv 0$), temos que

$$d_1(g_n, g) = \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^n dx = \int_0^1 u^n \cdot (b-a) du = \frac{b-a}{n+1} \rightarrow 0, \text{ enquanto}$$

$\leftarrow u = \frac{x-a}{b-a}$

$$d(g_n, g) = \max \left\{ \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^n; x \in [a, b] \right\} = 1 \text{ não tende a } 0.$$

Portanto $g_n \rightarrow g$ em (M, d_1) e $\text{Id}(g_n) = g_n$ não tende a $g = \text{Id}(g)$ em (M, d) .



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

EXEMPLO 2:

Seja $M = \mathbb{C}$ com as métricas

$$d_0(z_1, z_2) = d_0(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i) = \max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|\}$$

$$d_1(z_1, z_2) = d_1(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i) = |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|$$

$$\text{Como } d_0(z_1, z_2) = \max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|\} \leq \underbrace{|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|}_{d_1(z_1, z_2)} \leq 2 \cdot \max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|\} = 2 \cdot d_0(z_1, z_2),$$

temos que $d_0(z_1, z_2) \leq d_1(z_1, z_2) \leq 2 \cdot d_0(z_1, z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e, portanto,

as métricas são equivalentes.

(10) Mostre que, se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo limitado, (M, d_M) é um espaço métrico e $f: I \rightarrow M$ é uma função uniformemente contínua, então f é limitada.

Como I é um intervalo limitado, I é da forma $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ com $a < b$. Como f é uniformemente contínua, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq. $|x - y| < \delta \Rightarrow d_M(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Tomando $\varepsilon = 1$, $\exists \bar{\delta} > 0$ tq. $|x - y| < \bar{\delta} \Rightarrow d_M(f(x), f(y)) < 1$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tq. $n > \frac{(b-a)}{\bar{\delta}}$. Então é possível criar n pontos intermediários

em I da forma $a < z_1 < z_2 < \dots < z_n < b$ com $z_1 - a < \bar{\delta}$, $b - z_n < \bar{\delta}$ e $z_{j+1} - z_j < \bar{\delta}$, $\forall j = 1, \dots, n-1$, dividindo I em $n+1$ intervalos de diâmetro estritamente menor que $\bar{\delta}$.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

Dados $x, y \in I$, temos as seguintes possibilidades:

- $x < y < z_1 \Rightarrow |y-x| < \delta \Rightarrow d_M(f(x), f(y)) < 1$
- $z_n < x < y \Rightarrow |y-x| < \delta \Rightarrow d_M(f(x), f(y)) < 1$
- $z_j \leq x < y \leq z_{j+1}$, algum $j \in \{1, 000, n-1\} \Rightarrow |y-x| < \delta \Rightarrow d_M(f(x), f(y)) < 1$
- $x < z_p < z_q < y$, algum $p < q$ com $p, q \in \{1, 000, n\} \Rightarrow d_M(f(x), f(y)) \leq$

$$\begin{aligned} &\leq d_M(f(x), f(z_p)) + d_M(f(z_p), f(z_{p+1})) + \dots + d_M(f(z_{q-1}), f(z_q)) + \\ &+ d_M(f(z_q), f(y)) = \left[\sum_{j=p}^{q-1} d_M(f(z_j), f(z_{j+1})) \right] + d_M(f(x), f(z_p)) + d_M(f(z_q), f(y)) < \\ &< \left[\sum_{j=p}^{q-1} 1 \right] + 1 + 1 = q - p + 2 \leq (n-1) + 2 = n+1 \end{aligned}$$

Em todas as possibilidades se verifica que $d_M(f(x), f(y)) < n+1$, $\forall x, y \in I$ (Note que n foi tomado em função de δ e de $(b-a) = \text{diam}(I)$). Logo, $f(I)$ é um conjunto limitado de diâmetro menor ou igual a $n+1$.
 $\therefore f$ é limitada.

(11) Mostre que funções contínuas preservam conexidade e compacidade.

Sejam M e N espaços topológicos com M conexo e $f: M \rightarrow N$ contínuo. Vamos mostrar que $f(M)$ é conexo. Considere uma divisão de $f(M)$ por abertos A e B do subespaço $f(M) \subseteq N$, i.e., $A \cup B = f(M)$ e $A \cap B = \emptyset$.

Como f é contínuo, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos de M tais que considerando $f: M \rightarrow N$ ou $f: M \rightarrow f(M)$ temos $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = M$ e $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, isto é, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma divisão de M .

Como M é conexo, ele só tem a divisão trivial como possibilidade. Logo, $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = \emptyset$. Como A e B são subconjuntos de $f(M)$, segue que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, ou seja, $f(M)$ é conexo.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Nome _____ Nº USP _____

Curso _____ Período _____

Disciplina _____ Código USP _____

Data ____/____/____. Nota ____ (____) Pag ____

Sejam K e M espaços topológicos com K compacto e $f: K \rightarrow M$ contínuo. Vamos mostrar que $f(K) \subseteq M$ é compacto. Tomando o contradomínio de f , resulta que $f: K \rightarrow f(K)$ é contínuo e sobrejetivo.

Seja $\mathcal{B} = \{A_\ell\}_{\ell \in L}$ uma cobertura por abertos de $f(K)$, isto é, $A_\ell \subseteq f(K)$ é aberto ~~de~~ de $f(K)$, $\forall \ell \in L$ e $\bigcup_{\ell \in L} A_\ell = f(K)$.

Como f é contínuo, $f^{-1}(A_\ell)$ é aberto de K , $\forall \ell \in L$ e $\bigcup_{\ell \in L} f^{-1}(A_\ell) = K$, ou seja, $\mathcal{D} = \{f^{-1}(A_\ell)\}_{\ell \in L}$ é uma cobertura de K por abertos. Como K

é compacto, $\exists \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$ uma subcobertura finita de $\mathcal{D}$, isto é, $\exists \ell_1, \dots, \ell_n \in L$

tg. $\mathcal{D}_0 = \{f^{-1}(A_{\ell_j})\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$ cobre K . Mas então $\mathcal{B}_0 = \{A_{\ell_j}\}_{j \in \{1, \dots, n\}} \subseteq \mathcal{B}$ é uma

subcobertura finita de $\mathcal{B}$.

Portanto, $f(K)$ é compacto.